IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

14 marca 2009 r.

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

2. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

3. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od punktu S. Wykaż, że $AB > 2CD$.

4. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba

$$\frac{a-b}{a+b}$$

jest wymierna. Udowodnij, że liczba

$$\frac{2a-b}{2a+b}$$

jest także wymierna.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.