IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia trzeciego)
14 marca 2009 r.

Szkice rozwiązań

---

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

Rozwiązanie
Niech $x=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+10^na_n$, gdzie $a_0,a_1,\ldots,a_n$ są cyframi, będzie szukaną liczbą. Wówczas dany w treści zadania warunek możemy przepisać w postaci

$$a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+10^na_n=11(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n)\,.$$

Jest on równoważny zależności

$$(10^2-11)a_2+(10^3-11)a_3+\ldots+(10^n-11)a_n=10a_0+a_1\,. \tag{1}$$

Zauważmy, że prawa strona równości (1) jest liczbą dwucyfrową. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej $k\geqslant 3$, liczba a_k jest różna od 0. Wówczas $(10^k-11)a_k\geqslant 10^3-11=989$. Wynika stąd, że lewa strona zależności (1) jest większa lub równa od 989. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a_3=a_4=\ldots=a_n=0$.
Równość (1) przybiera zatem postać

$$89a_2=10a_0+a_1\,. \tag{2}$$

Jeśli $a_2\geqslant 2$, to lewa strona równości (2) jest większa lub równa od $89\cdot 2=178$, gdy tymczesem po prawej stronie tej równości jest liczba co najwyżej dwucyfrowa. Wobec tego $a_2=0$ lub $a_2=1$.
Jeśli $a_2=0$, to $a_0=a_1=0$, skąd obliczamy $x=0$. Liczba ta jednak nie spełnia warunków zadania (nie jest dodatnia).
Jeśli z kolei $a_2=1$, to $a_0=8$, $a_1=9$. Wtedy $x=198$. Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.
Odp.: Jedyną liczbą spełniająca warunki zadania jest **198**.

---

2. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie
Ponieważ dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze, więc łączna liczba meczów w turnieju wynosi

$$\frac{2n+3n}{2}=\frac{5n}{2}\,.$$

Zatem, aby opisana sytuacja była możliwa, liczba n musi być parzysta.
Wykażemy teraz, że jeśli $n=2k$ jest liczbą parzystą, to można zaplanować mecze tak, aby spełnione były warunki zadania.
Przyjmijmy, że $2n=4k$ zawodników $A_1,A_2,\ldots,A_{4k}$ rozgrywało mecze w następujący sposób: zawodnik A_1 zagrał z A_2, A_2 zagrał z A_3, $\ldots$, A_{4k} zagrał z A_1. Ponadto przyjmijmy, że zawodnik A_1 zagrał z A_{2k+1}, A_3 zagrał z A_{2k+3}, $\ldots$, A_{2k-1} zagrał z A_{4k-1}.
Wówczas każdy z n zawodników $A_2,A_4,\ldots,A_{4k}$ rozegrał dokładnie dwa mecze, a każdy z pozostałych n zawodników $A_1,A_3,\ldots,A_{4k-1}$ rozegrał dokładnie trzy mecze.

---

3. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od punktu S. Wykaż, że $AB > 2CD$.

Rozwiązanie

Wykorzystując nierówność trójkąta ACS uzyskujemy

$$AC + CS > AS = DS = CD + CS,$$

skąd wynika, że $AC > CD$. Analogicznie, wykorzystując nierówność trójkąta BCS, dowodzimy, że $BC > CD$. Dodając stronami dwie ostatnie nierówności otrzymujemy $AB > 2CD$, co należało udowodnić.

---

4. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba $\dfrac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\dfrac{2a-b}{2a+b}$ jest także wymierna.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że liczba $x = \dfrac{a}{b}$ jest wymierna. Niech $\dfrac{a-b}{a+b} = p$. Wówczas $\dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = p$, skąd uzyskujemy $\dfrac{x-1}{x+1} = p$. Wyznaczając z ostatniej zależności x, otrzymujemy

$$x = \frac{1+p}{1-p}.$$

Ponieważ liczba p jest wymierna, więc wymierne są także liczby $1+p$ oraz $1-p$. Stąd wniosek, że iloraz liczb $1+p$ oraz $1-p$, czyli liczba x, jest także liczbą wymierną.

Ponadto

$$\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{2\frac{a}{b}-1}{2\frac{a}{b}+1} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Ponieważ x jest liczbą wymierną, więc liczby $2x-1$ oraz $2x+1$ są także wymierne. Stąd wynika, że iloraz liczb $2x-1$ oraz $2x+1$ jest liczbą wymierną, co należało wykazać.

---

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odp.: Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję. Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawami są sześciokąty $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$ (zob. rysunek). Następnie poprowadźmy przez punkty A' i D' płaszczyznę, która przecina krawędzie BB' i CC' odpowiednio w punktach P i Q. Płaszczyzna ta rozcina graniastosłup na dwa wielościany. Jeden z uzyskanych wielościanów ma osiem ścian będących czworokątami i jedną ścianę będącą sześciokątem, a więc wszystkie jego ściany mają parzystą liczbę boków. Ponadto wielościan ten ma 19, czyli nieparzystą liczbę krawędzi.