V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
Zawody stopnia drugiego
(9 stycznia 2010 r.)

Szkice rozwiązań

---

1. Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma każdych jedenastu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych dziesięciu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

Rozwiązanie
Niech $x_1, x_2, \ldots, x_{21}$ będą danymi liczbami. Wówczas

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{11} > x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{21}\,,$$
$$x_1 + x_{12} + x_{13} + \ldots + x_{21} > x_2 + x_3 + \ldots + x_{11}\,.$$

Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy

$$2x_1 + (x_2 + x_3 + \ldots + x_{21}) > x_2 + x_3 + \ldots + x_{21}\,,$$

skąd $2x_1 > 0$, czyli $x_1 > 0$.
Analogicznie dowodzimy, że pozostałe liczby $x_2, x_3, \ldots, x_{21}$ są dodatnie.

---

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad CD < BC\,.$$

Na boku BC tego trapezu wybrano taki punkt E, że $EB = CD$. Wykaż, że $BD = AE$.

Rozwiązanie
Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych BC i AD. Wówczas z równości kątów danych w treści zadania wynika, że trójkąty ABP i DCP są równoboczne. Wobec tego $CP = EB$, a więc punkty E i C są symetryczne względem wysokości trójkąta ABP poprowadzonej z wierzchołka A. Stąd wynika, że $AE = AC = BD$.

---

3. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

Rozwiązanie
Dla $n = 1$ obie liczby są pierwsze: wynoszą odpowiednio 3 i 5.
Wykażemy, że dla $n \geqslant 2$ co najmniej jedna z liczb $n^2 + n + 1$, $n^2 + n + 3$ jest złożona.
Jeśli liczba n jest podzielna przez 3 lub przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba $n^2 + n + 3 = n(n+1) + 3$ jest podzielna przez 3. Ponieważ liczba $n^2 + n + 3$ jest większa od 3, więc jest złożona.
Jeśli natomiast liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to liczba n^2+n+1 jest podzielna przez 3. Dla $n \geqslant 2$ liczba $n^2 + n + 1$ jest większa od 3, a więc jest złożona.

---

4. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że osoba A będąca na przyjęciu ma trzech znajomych: B, C oraz D. Oznaczmy przez E i F pozostałe dwie osoby z przyjęcia. Wówczas osoba E nie może znać osoby A, bowiem w przeciwnym razie osoba A miałaby więcej niż trzech znajomych. Wobec tego, jeśli osoby E i F się znają, to osoba E musi znać dwie osoby spośród B, C, D; natomiast jeśli osoby E i F się nie znają, to osoba E zna wszystkie osoby B, C oraz D.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że znajomymi osoby E są B i C. Jeżeli osoby A, B, E, C usiądą wokół okrągłego stołu w tej właśnie kolejności, to każda z nich będzie siedziała między swoimi dwoma znajomymi.

---

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga:

Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taki ostrosłup istnieje.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie taki czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB = 90^\circ .$$

Niech ponadto S będzie takim punktem w przestrzeni, że prosta SA jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$.

Wykażemy, że ostrosłup $SABCD$ spełnia warunki zadania, a mianowicie, że:

(a) krawędź SA jest prostopadła do krawędzi AB,

(b) krawędź SB jest prostopadła do krawędzi AD,

(c) krawędź SC jest prostopadła do krawędzi BC oraz

(d) krawędź SD jest prostopadła do krawędzi CD.

Ponieważ prosta SA jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$, więc własność (a) jest spełniona. Wykażemy, że spełniona jest własność (b).

Zauważmy, że prosta AD jest prostopadła do prostej AS oraz do prostej AB, a więc jest prostopadła do płaszczyzny ABS. Stąd wynika, że prosta AD jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie ABS, a więc w szczególności do prostej SB.

Analogicznie dowodzimy własności (c) oraz (d).
