VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia pierwszego)

1 września 2010 r. – 25 października 2010 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia 25 października 2010 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

`www.omg.edu.pl`

---

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2+x(y-4)=-2 \\ y^2+y(x-4)=-2 \end{cases}$$

2. W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.

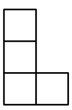
3. Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}>\sqrt{a+b+c}.$$

4. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX$, $LCMX$, $NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X.

5. W każde pole kwadratowej tablicy 100×100 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L-tetraminem, jest równa 0. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.

Uwaga: L-tetraminem nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku obok. L-tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.



6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego przekątne przecinają się w punkcie E, a kąt BEC jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej AC przecina prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do prostej BD w punkcie F. Wykaż, że proste EF i AD są prostopadłe.

7. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie

$$a^2-b^3=4.$$