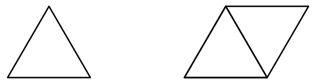
Treści zadań (poziom OMG)

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Okręgi o środkach B i C przechodzące przez punkt A przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach D i E. Punkt F wybrano wewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, że $DF = EF$ oraz $\sphericalangle DFE = 90^\circ$. Wykaż, że $AF = DF$.

2. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach (każdy z narysowanych odcinków ma długość 1):



Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n wyznacz najmniejszą liczbę płytek potrzebnych do ułożenia trójkąta równobocznego o boku n.

Uwaga. Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

3. Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej n oraz każdej dodatniej liczby całkowitej k, liczba $n^{2^k} - 1$ jest podzielna przez 2^{k+2}.

Uwaga: Potęgowanie wykonujemy *od góry*, tzn. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

4. Interesują nas takie ostrosłupy czworokątne $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w których

$$2\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC, \quad 2\sphericalangle BSC = \sphericalangle CSD, \quad 2\sphericalangle CSD = \sphericalangle DSA.$$

Przypuśćmy, że $2\sphericalangle SAD = \sphericalangle SAB$ oraz trójkąty ABS i ADS są równoramienne. Wyznacz wszystkie możliwe miary kąta SAB.

5. Udowodnij, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$2xy + 3yz + 6zx \leqslant 20x^2 + 5y^2 + z^2.$$

6. Wyznacz największą liczbę naturalną d o następującej własności: Dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m, n, jeżeli iloczyn mn jest podzielny przez 25 600 000 (słownie: dwadzieścia pięć milionów sześćset tysięcy), to co najmniej jedna z liczb m, n jest podzielna przez d.

7. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ istnieje taki punkt P, że spełnione są warunki

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP = \sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = 45^\circ.$$

Udowodnij, że $BC + DE + FA \geqslant \max(AB, CD, EF)$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

8. Wyznacz liczbę par dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających równanie

$$m(m+1)=(n-17)(n+17).$$

Drugie zawody indywidualne

9. Na tablicy narysowano 2014 kółek, 3000 krzyżyków i 5000 kwadratów. W jednym ruchu możemy wykonać jedną z następujących operacji:

- zmazać dwa kółka i narysować krzyżyk,
- zmazać dwa krzyżyki i narysować kwadrat,
- zmazać dwa kwadraty i narysować kółko.

Rozstrzygnij, czy można wykonać taki ciąg ruchów, aby na tablicy pozostały mniej niż trzy figury.

10. Rozstrzygnij, czy istnieje czworokąt wypukły, który nie jest trapezem, a jego przekątne dzielą go na cztery trójkąty równoramienne.

11. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+d}{c}+\frac{c+e}{d}+\frac{d+a}{e}+\frac{e+b}{a}\geqslant 10.$$

12. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}\geqslant \frac{5}{2}.$$

Trzecie zawody indywidualne

13. Punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Proste AM i BN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że w czworokąt $MPNC$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty APC i BPC są styczne.

14. Na kwadratowej szachownicy o boku 2015 umieszczamy prostokąty o wymiarach 1×10 tak, że każdy z nich pokrywa 10 pól szachownicy, a przy tym żadne pole nie jest pokryte przez więcej niż jeden prostokąt. Ile co najmniej pól szachownicy musi pozostać niepokrytych?

15. Rozstrzygnij, dla ilu liczb naturalnych $n>1$ prawdziwe jest następujące zdanie: Dla każdej dodatniej liczby całkowitej a względnie pierwszej z n, liczba a^6-1 jest podzielna przez n.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

16. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCD$ o podstawie BCD, w którym wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A są proste oraz krawędzie boczne mają długość 1. Rozstrzygnij, czy odległość między środkami sfery wpisanej w dany ostrosłup i sfery opisanej na tym ostrosłupie jest liczbą wymierną.

Czwarte zawody indywidualne

17. Wykaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to liczba p^6+6 jest złożona.

18. Udowodnij, że dla każdej czwórki liczb rzeczywistych a, b, c, d spełniającej układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=12 \\ a^3+b^3+c^3+d^3=28 \end{cases}$$

zachodzi nierówność

$$abc+bcd+cda+dab \geqslant -4.$$

19. Na bokach AC i BC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $AK=BL$. Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków AB i KL. Wykaż, że prosta MN jest równoległa do dwusiecznej kąta ACB.

20. Rozstrzygnij, czy w kwadracie o boku 51 można umieścić 145 kwadratów 4×4 o rozłącznych wnętrzach.

21. Niech p będzie liczbą pierwszą. Przyjmijmy

$$a_0=p \quad \text{oraz} \quad a_{n+1}=3^{a_n}-2^{a_n} \quad \text{dla} \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

Wykaż, że jeżeli a_p jest liczbą złożoną, to liczba a_{p^2} też jest złożona.

Mecz matematyczny

22. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite $m<n$, że $n<1{,}001\cdot m$, a przy tym liczba n^n jest podzielna przez m^m.

23. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt A_1 wybrano w taki sposób, że $\sphericalangle A_1BC=\sphericalangle A_1CB=\sphericalangle BAC$ oraz punkty A, A_1 leżą po tej samej stronie prostej BC. W analogiczny sposób wybrano punkty B_1 i C_1. Udowodnij, że trójkąty ABC i $A_1B_1C_1$ mają równe pola.

24. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^4+b^4+c^4+d^4=5^{2014}$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c, d.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

25. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita, którą można przedstawić na co najmniej 2014 sposobów w postaci

$$a^2+b^3+c^5,$$

gdzie a, b, c są dodatnimi liczbami całkowitymi.

26. Niech S_A, S_B, S_C, S_D oznaczają pola powierzchni sfer dopisanych odpowiednio do ścian BCD, CDA, DAB, ABC czworościanu $ABCD$, a S pole powierzchni sfery wpisanej w ten czworościan. Wykaż, że

$$\frac{1}{S} \leqslant \frac{1}{S_A}+\frac{1}{S_B}+\frac{1}{S_C}+\frac{1}{S_D}.$$

27. Udowodnij, że dla każdej szóstki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e, f zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2-ab\sqrt{3}+b^2}+\sqrt{b^2-bc\sqrt{3}+c^2}+\sqrt{c^2-cd\sqrt{3}+d^2}+$$
$$+\sqrt{d^2-de\sqrt{3}+e^2}+\sqrt{e^2-ef\sqrt{3}+f^2} \geqslant \sqrt{a^2+af\sqrt{3}+f^2}\,.$$

28. Rozstrzygnij, czy dla każdej piątki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zachodzi nierówność

$$\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+d}+\frac{d}{c+e}+\frac{e}{d+a}+\frac{a}{e+b}+\frac{b}{e+d}+\frac{c}{a+e}+\frac{d}{b+a}+\frac{e}{c+b}+\frac{a}{d+c} \geqslant 5.$$

29. Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach $AB>CD$. Punkt M jest środkiem boku AB. Proste AC, BC przecinają okrąg opisany na trójkącie CDM po raz drugi odpowiednio w punktach K, L. Proste MK, ML przecinają prostą CD odpowiednio w punktach P, Q. Wykaż, że punkt D jest środkiem odcinka PQ.

30. W okrąg wpisano dwa wielokąty równokątne: 2014-kąt i 2016-kąt. Jaką największą liczbę wspólnych boków mogą mieć te dwa wielokąty?

31. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, który ma siatkę będącą trójkątem prostokątnym.

32. Podaj liczbę naturalną $n>1$ o następujących własnościach:

1° Dla każdej dodatniej liczby całkowitej $k<n$, Twoja drużyna potrafi przedstawić dowód następującego twierdzenia: Istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^k+k jest pierwsza.

2° Drużyna przeciwna nie potrafi udowodnić, że istnieje skończenie wiele liczb pierwszych p, dla których liczba p^n+n jest pierwsza.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procedura referowania rozwiązania tego zadania:

Kapitan drużyny referującej **X** wskazuje liczbę n.

Kapitan drużyny przeciwnej **Y** wskazuje **jedną** liczbę $k<n$.

Drużyna **X** przedstawia, na ogólnych zasadach rozgrywki meczowej, dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie $\mathbf{1}^\circ$ dla wskazanej liczby k.

Drużyna **Y**, w ramach formułowania usterek przedstawionego rozwiązania, może zaprezentować dowód twierdzenia sformułowanego w punkcie $\mathbf{2}^\circ$. Dowód ten przedstawia zawodnik wydelegowany przez kapitana drużyny **Y**, bez możliwości zmiany osoby referującej. Uznanie tego dowodu za poprawny oznacza automatyczne uznanie rozwiązania drużyny **X** za błędne.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego