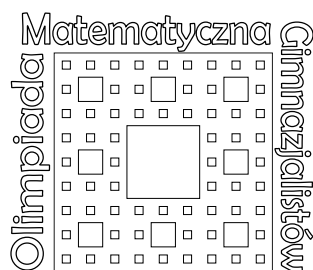


Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej  
Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Treści zadań



Perzanowo 2011



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO  
EDUKACJI  
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Zawody indywidualne

1. Wyznacz wszystkie pary  $(x, y)$  liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$x^2 + y^2 + 2x + xy + 4 = 2y.$$

2. Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Punkty  $K$  i  $L$  leżą odpowiednio na odcinkach  $AB$  i  $AD$ , przy czym czworokąt  $AKCL$  jest równoległobokiem. Odcinki  $KD$  i  $BL$  przecinają się w punkcie  $M$ . Wykaż, że pola czworokątów  $AKML$  i  $BCDM$  są równe.

3. Liczby  $k$  i  $m$  można przedstawić w postaci  $a^2 + 2b^2$ , gdzie  $a, b$  są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że także liczbę  $km$  można przedstawić w tej postaci.

4. Dany jest trójkąt prostokątny  $ABC$ , w którym  $\sphericalangle A = 90^\circ$  oraz  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Różne punkty  $D, E, F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$ . Wykaż, że obwód trójkąta  $DEF$  jest większy od

$$\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

5. Liczba  $a > 1$  jest całkowita, przy czym nie jest ona ani liczbą pierwszą, ani potęgą liczby 2. Wykaż, że liczbę  $a$  można przedstawić w postaci sumy co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych dodatnich.

6. Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb  $a, b$  spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{b^4 + a^2} \leq \frac{1}{ab}.$$

7. Prostokąt rozcięto na pewną liczbę części, z których każda jest kwadratem o wymiarach  $2 \times 2$  lub prostokątem o wymiarach  $1 \times 4$ . Następnie jeden kwadrat  $2 \times 2$  wymieniono na jeden prostokąt  $1 \times 4$ . Wykaż, że z otrzymanych części nie można ułożyć wyjściowego prostokąta.

8. W trapezie  $ABCD$  punkt  $S$  leży na podstawie  $AB$ , a punkt  $R$  leży na podstawie  $CD$ . Odcinki  $DS$  i  $AR$  przecinają się w punkcie  $K$ , a odcinki  $CS$  i  $BR$  przecinają się w punkcie  $L$ . Wykaż, że suma pól trójkątów  $AKD$  i  $BCL$  jest równa polu czworokąta  $KSLR$ .

9. Dane są takie liczby całkowite  $a, b$  (różne od zera), że liczba  $ab$  jest dzielnikiem liczby  $a^2 - b^2$ . Udowodnij, że  $|a| = |b|$ .

10. Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku długości 1. Wyznacz wszystkie takie pary punktów  $(P, Q)$ , leżące wewnątrz tego kwadratu, dla których

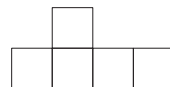
$$AP + DP + PQ + BQ + CQ = 1 + \sqrt{3}.$$

11. Rozwiąż równanie  $x^3 - \sqrt{x^2 - 4} + 8 = 0$ .

12. Jeśli szerokość pewnego prostokąta powiększymy o 50%, to jego szerokość powiększy się o 25%. O ile procent zmniejszy się długość tego prostokąta, jeśli jego długość zmniejszymy o 50%?

13. Przekątne pewnego trapezu mają długości 15 oraz 20, a wysokość tego trapezu wynosi 12. Oblicz pole tego trapezu.

14. Czy kwadrat o wymiarach  $100 \times 100$  można rozciąć na części przystające do tej na rysunku? (Każda część składa się z pięciu kwadratów jednostkowych.) Odpowiedź uzasadnij.



15. Dany jest taki ostrosłup czworokątny  $SABCD$  o podstawie  $ABCD$ , w którym  $AS = BS = DS$  oraz

$$2\angle ASB = \angle BSC, \quad 2\angle BSC = \angle CSD, \quad 2\angle CSD = \angle DSA.$$

Wiadomo też, że  $\angle SAB = 2\angle SAD$ . Wyznacz miarę kąta  $SAB$ .

16. Wewnątrz koła o promieniu 1 wybrano sześć punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o co najwyżej 1.

17. Czy liczbę 1 można przedstawić jako sumę odwrotności ośmiu różnych liczb naturalnych?

18. Wyznacz wszystkie trójki  $(a, b, c)$  nieujemnych liczb rzeczywistych, dla których spełnione są równości

$$\sqrt{a} + \sqrt{b+c} = \sqrt{b} + \sqrt{c+a} = \sqrt{c} + \sqrt{a+b}.$$

19. Okrąg  $\omega$  jest wpisany w romb  $ABCD$ . Prosta  $k$ , styczna do okręgu  $\omega$ , przecina odcinki  $BC$  i  $CD$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Wykaż, że wartość iloczynu  $BP \cdot DQ$  nie zależy od wyboru stycznej  $k$ .

20. W pewnym turnieju bierze udział  $n$  graczy. Każdy rozgrywa jeden mecz z każdym i nie ma remisów. Udowodnij, że po zakończeniu turnieju wszystkich zawodników można tak ustawić w kolejce, aby każdy z nich, z wyjątkiem pierwszego, stał bezpośrednio za zawodnikiem, z którym wygrał.

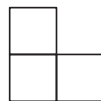
21. Dany jest sześcian  $ABCD A'B'C'D'$  o krawędzi długości 1. Oblicz odległość pomiędzy prostymi  $A'B$  i  $B'C$ .

### Mecz matematyczny

22. Wyznacz wszystkie pary  $(p, q)$  liczb pierwszych, dla których

$$p + q = (p - q)^3.$$

**23.** Dana jest szachownica  $32 \times 32$ . Po usunięciu pewnego pola okazało się, że pozostałą część tej szachownicy można pokryć klockami zbudowanymi z trzech kwadratów jednostkowych, jak na rysunku. Które pole usunięto?



**24.** Czy istnieje dziesięć takich liczb naturalnych, że żadna z tych liczb nie dzieli się przez żadną z pozostałych, a kwadrat każdej z tych liczb dzieli się przez każdą z pozostałych?

**25.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$ . Punkty  $D, E, F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$ , przy czym  $\sphericalangle FDE = \sphericalangle BAC$  oraz  $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$ . Wykaż, że punkt przecięcia wysokości trójkąta  $DEF$  pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ .

**26.** Dany jest trójkąt ostrokątny  $ABC$  oraz jego wysokości  $AD$  i  $BE$ . Punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $A$  i  $B$  na prostą  $DE$ . Wykaż, że  $PE = DQ$ .

**27.** Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , dla której liczba  $7^n - 1$  jest podzielna przez liczbę  $6^n - 1$ .

**28.** Na przyjęciu spotkało się  $n$  osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznanymych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

**29.** Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb  $a, b, c$  spełniona jest nierówność

$$\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}.$$

**30.** Punkty  $K, L, M, N$  leżą odpowiednio na bokach  $CD, DA, AB, BC$  czworokąta wypukłego  $ABCD$ , przy czym żaden z tych punktów nie pokrywa się z wierzchołkiem czworokąta. Wykaż, że jeżeli  $[AKB] = [CDM]$  oraz  $[BCL] = [DAN]$ , to  $[ABK] = [BCL]$ .

*Uwaga:* Symbol  $[XYZ]$  oznacza pole trójkąta  $XYZ$ .

**31.** Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup czworokątny o krawędziach bocznych różnej długości, który można podzielić na trzy przystające czworościany.

**32.** Piotrek i Marcin zostali wyrzuceni z zajęć. Otrzymali długopis i kartkę z napisaną liczbą 2. Co minutę wykonują następującą operację: mnożą wszystkie liczby znajdujące się na kartce, dodają liczbę 1, a następnie wpisują na kartkę największy dzielnik pierwszy otrzymanej liczby. Mogą wrócić na zajęcia dopiero wtedy, gdy na kartce pojawi się liczba 5. Czy kiedykolwiek to nastąpi? Jeśli tak, to po ilu minutach?