Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Znajowanie pola

Waldemar Pompe

Początki z OMJ

Zdalne seminarium olimpijskie dla nauczycieli matematyki szkół podstawowych

Zoom, 22 i 23 maja 2020 r.

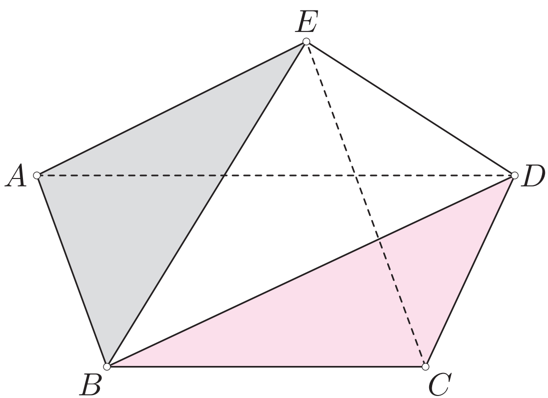
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

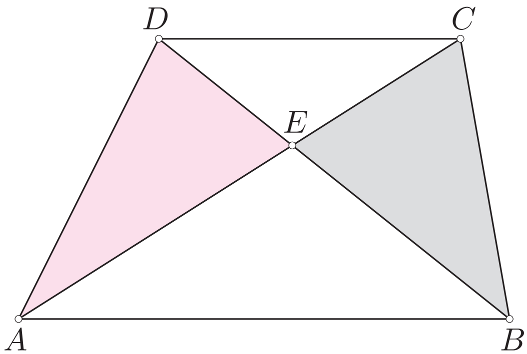
Zadanie 1.

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym przekątna AD jest równoległa do boku BC, a przekątna CE jest równoległa do boku AB. Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.



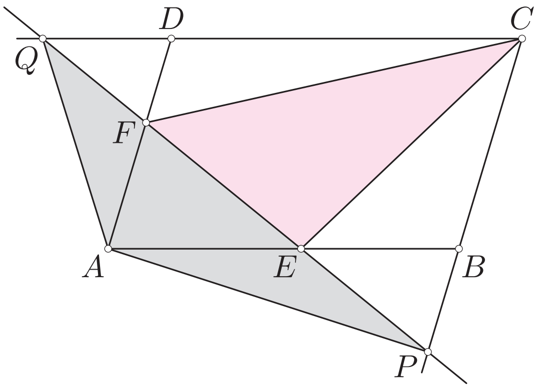
Zadanie 2.

Przekątne trapezu $ABCD$ (o podstawach AB i CD) przecinają się w punkcie E. Wykaż, że pola trójkątów BCE i DAE są równe.



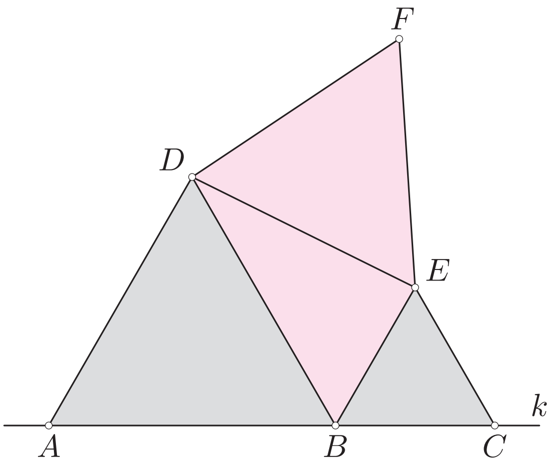
Zadanie 3. (I OMG, zawody III stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykazać, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.



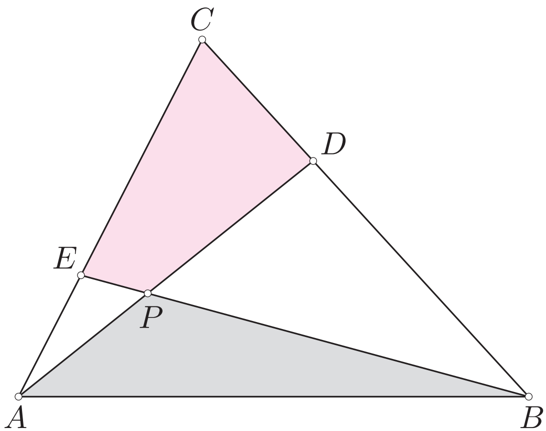
Zadanie 4. (Catriona Shearer, twitter — @Cshearer41)

Punkty A, B, C leżą w tej właśnie kolejności na prostej k. Trójkąty ABD i BCE są równoboczne i leżą po tej samej stronie prostej k. Trójkąt DEF jest równoboczny i leży po zewnętrznej stronie trójkąta BDE. Wykaż, że suma pól trójkątów ABD i BCE jest równa sumie pól trójkątów BDE i DEF.



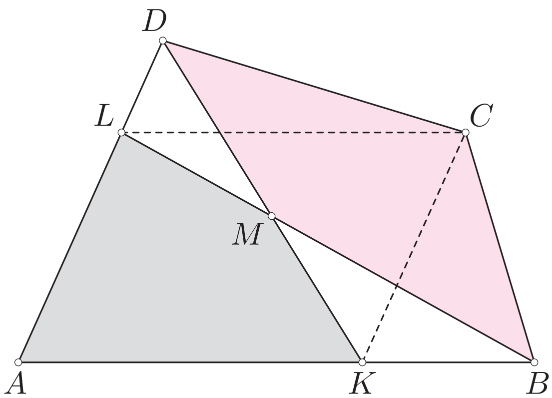
Zadanie 5.

Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym $BD=2DC$ oraz $CE=2EA$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że pole czworokąta $EPDC$ jest równe polu trójkąta ABP.



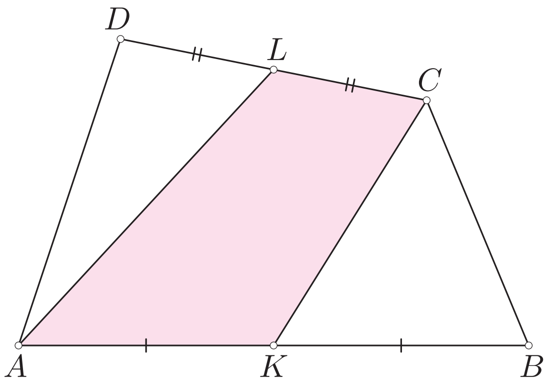
Zadanie 6.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD oraz BL przecinają się w punkcie M. Udowodnić, że pola czworokątów $AKML$ i $BCDM$ są równe.



Zadanie 7.

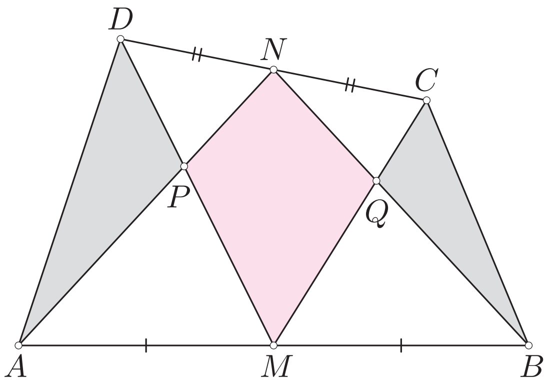
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i CD. Wykaż, że pole czworokąta $AKCL$ jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$.



Zadanie 8.

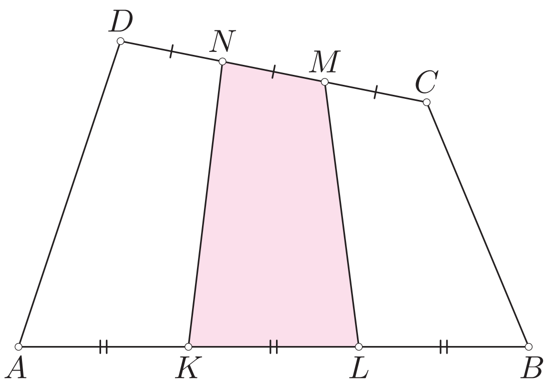
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Proste AN i DM przecinają się w punkcie P, a proste BN i CM przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że suma pól trójkątów APD i BCQ jest równa polu czworokąta $PNQM$.

Wskazówka. Nie rysuj odcinka MN.



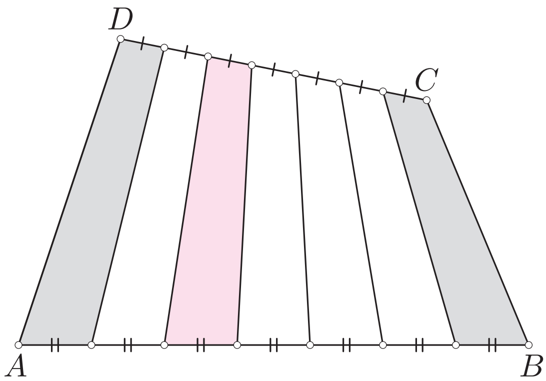
Zadanie 9.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L leżą na boku AB, przy czym $AK=KL=LB$, a punkty M, N leżą na boku CD, przy czym $CM=MN=ND$. Wykaż, że pole czworokąta $KLMN$ jest równe 1/3 pola czworokąta $ABCD$.



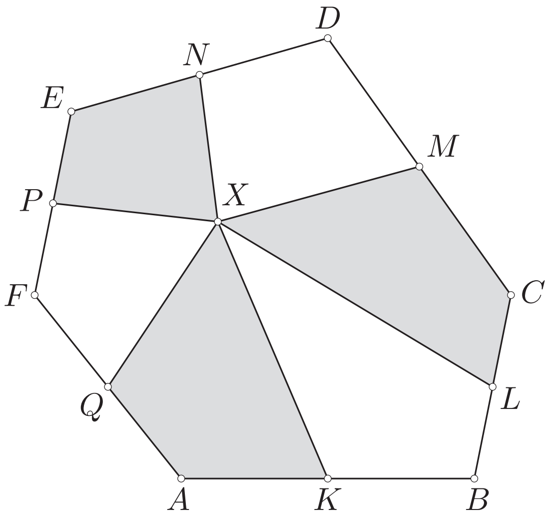
Zadanie 10.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Każdy z odcinków AB i CD podzielono na 7 równych części, po czym połączono odcinkami odpowiednie punkty podziału, dzieląc wyjściowy czworokąt na 7 czworokątnych pasów. Wiedząc, że pole pierwszego pasa równa się a, a ostatniego b, oblicz pole trzeciego pasa.



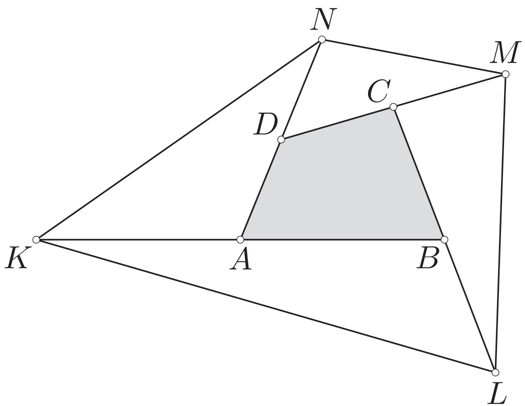
Zadanie 11.

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Punkt X leży wewnątrz sześciokąta. Wykaż, że suma pól czworokątów $AKXQ$, $CMXL$, $EPXN$ równa się połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.



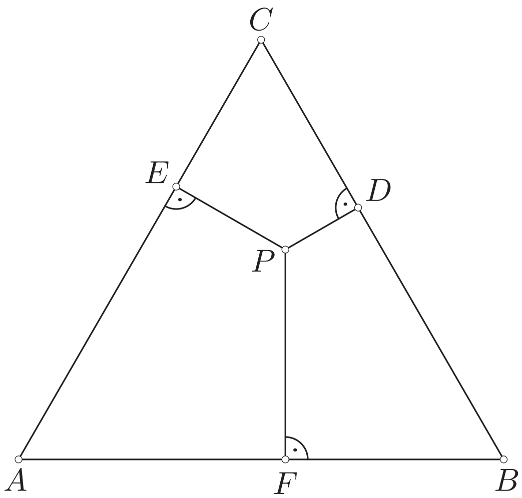
Zadanie 12. (III OMG, zawody I stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Obliczyć pole czworokąta $KLMN$.



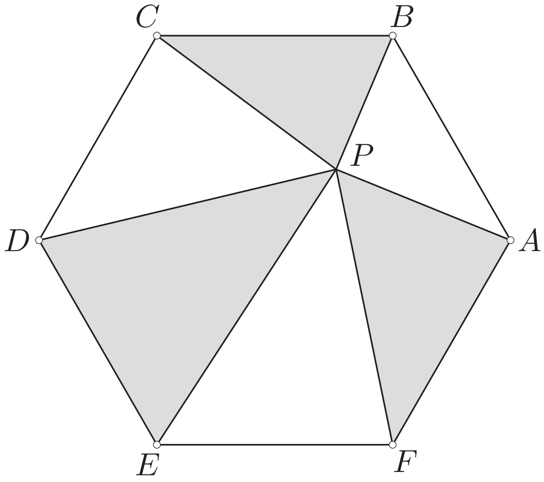
Zadanie 13.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wykaż, suma długości odcinków PD, PE, PF nie zależy od wyboru punktu P.



Zadanie 14. (III OMG, zawody II stopnia)

Punkt P leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów PAB, PCD, PEF jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.



Zadanie 15.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wykaż, suma pól trójkątów APF, BPD, CPE równa się połowie pola trójkąta ABC.