

Potęgi dwójki

Zadanie 1. Czy dowolne sześć parami różnych niezerowych cyfr można zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę podzieloną przez 4?

Zadanie 2. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, m , że liczba $n + m$ -cyfrowa postaci

$$\underbrace{33\dots3}_m \underbrace{66\dots6}_n$$

a) jest podzielna przez 8, b) jest podzielna przez 16, c) jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. Czy istnieje taka liczba naturalna n , że liczba 2^n kończy się czterema jednakowymi cyframi?

Zadanie 4. Rozstrzygnij, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że w zapisie dziesiętnym liczby 2^n każda z cyfr $0, 1, 2, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

Zadanie 5. Dana jest 2024-cyfrowa liczba naturalna n o tej własności, że każde kolejne 5 cyfr rozwinięcia dziesiętnego tej liczby tworzy liczbę podzielną przez 32. Wykaż, że liczba n podzielna jest przez 2^{2024} .

Zadanie 6. Uzasadnij, że jeśli przestawimy cyfry w zapisie dziesiętnym liczby postaci 2^n , to nie jest możliwe uzyskanie zapisu dziesiętnego liczby 2^m , gdzie m, n są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.

Zadanie 7. Załóżmy, że suma cyfr liczby 2^n jest taka sama jak suma cyfr liczby 2^m , dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n oraz m . Uzasadnij, że liczba $n - m$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 8. Liczba 2^{29} jest 9-cyfrowa i ma w zapisie dziesiętnym parami różne cyfry. Wiedząc to, rozstrzygnij (bez obliczania tej liczby), która cyfra nie występuje w zapisie tej liczby.

Zadanie 9. Wykaż, że liczba 2^n ma nie więcej niż $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ cyfr, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x .

Zadanie 10. Liczby 2^n oraz 5^n zaczynają się tą samą cyfrą. Jaka to cyfra?

Zadanie 11. Złączono zapis dziesiętny dwóch liczb postaci 2^n oraz 2^m , gdzie n, m są dodatnimi liczbami całkowitymi. Czy istnieją takie liczby m, n , że uzyskana liczba jest potęgą dwójki o wykładniku naturalnym?

Zadanie 12. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej $n > 1$ istnieje dokładnie jedna liczba n -cyfrowa, która jest potęgą dwójki i zaczyna się cyfrą 1.

Zadanie 13. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje taka liczba n -cyfrowa, w której zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1, 2, oraz która jest podzielna przez 2^n .

Zadanie 14. Wykaż, że jeśli n jest liczbą naturalną, a k jest liczbą nieparzystą, to liczba $k^{2^n} - 1$ jest podzielna przez 2^{n+2} .

Zadanie 15. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 16. Wykaż, że dla liczb całkowitych $m > n > 0$ liczby $2^{2^m} + 1$ oraz $2^{2^n} + 1$ są względnie pierwsze.

Zadanie 17. Niech n będzie liczbą naturalną. Wykaż, że

$$\left(1 + \frac{1}{2^{2^0}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^2}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) < 2.$$