

Program merytoryczny Olimpiady Matematycznej Juniorów w latach szkolnych 2022/2023, 2023/2024, 2024/2025

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest trzyetapowym konkursem ogólnopolskim. Uczestnicy rozwiązują zadania o zróżnicowanym stopniu trudności. Na ogół nie są to typowe zadania szkolne; wymagają nie tyle dużej wiedzy, ile pomysłowości i wyobraźni. Zadania te mają na celu rozbudzanie zamiłowania do matematyki, kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy oraz stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży uzdolnionej. W szerszej perspektywie edukacyjnej zadania olimpijskie stanowią narzędzie wspierania rozwoju intelektualnego dzieci wchodzących w etap operacyjny formalny, którego początki przypadają między 11. a 15. rokiem życia, a więc na ogół w starszych klasach szkoły podstawowej. Zadania te wymagają myślenia abstrakcyjnego oraz inicjowania samodzielnego przeprowadzania dowodów matematycznych, także dowodów nie wprost, zbudowanych na poprawnych wnioskowaniach i uwzględniających wszystkie przypadki przewidziane w treści zadania. Mogą również polegać na wskazywaniu, z odpowiednim uzasadnieniem, przykładów lub kontrprzykładów potwierdzających lub zaprzeczających określonym hipotezom. Za poprawne rozwiązanie uważa się takie, w którym przedstawiony jest poprawny tok rozumowania, czyli ciąg uzasadnionych wniosków prowadzących od założeń zadania do tezy.

Zadania zawodów I stopnia wprowadzają w tematykę zadań olimpijskich i zachęcają do intelektualnego wysiłku. Zadania części korespondencyjnej mają charakter problemowy. Na samodzielne rozwiązanie tych zadań w warunkach domowych uczniowie mają ponad miesiąc. Przez ten czas uczniowie powinni, z pomocą nauczyciela lub dostępnej literatury, poszerzyć swoją wiedzę i umiejętności na tyle, aby mogli samodzielnie rozwiązać przynajmniej część tych zadań. Uzyskana przy tym wysiłku wiedza oraz umiejętności są wystarczające do uzyskania oceny bardzo dobrej z matematyki na zakończenie nauki matematyki w szkole podstawowej. Część testowa z kolei sprawdza umiejętności logicznego wnioskowania na najprostszych pojęciach z zakresu podstawy programowej i zachęca do pracy nad zadaniami części korespondencyjnej.

Zawody II stopnia nie są trudniejsze od zadań części korespondencyjnej i eksponują ten sam zakres tematyczny. Zawody te jednak są przeprowadzane w formie trzygodzinnego sprawdzianu, co wymaga od uczestnika dużego skupienia i większej wprawy w rozwiązywaniu zadań problemowych, szybszego prowadzenia rozumowań, szybszego kojarzenia faktów i ich wykorzystywania oraz precyzyjnego wyrażania myśli w krótkim czasie. Umiejętności te są wystarczające do uzyskania oceny celującej z matematyki na zakończenie nauki w szkole podstawowej.

Zawody III stopnia są adresowane do wyselekcjonowanej grupy uczniów, którzy wykazali się już znacznym potencjałem matematycznym. Zakres wiedzy jest taki sam, jak w przypadku zawodów stopnia II, jednak zadania te są już nieco bardziej złożone i wymagają już dużej wprawy, oraz doświadczenia w prowadzeniu matematycznych rozumowań. Laureaci Olimpiady Matematycznej Juniorów posiadają wiedzę i umiejętności pozwalające na dalszy intensywny rozwój matematyczny oraz na bardzo wczesny start w Olimpiadzie Matematycznej dla uczniów szkół ponadpodstawowych.

Zakłada się, że w ramach przygotowania do Olimpiady uczniowie poszerzają swoją wiedzę i poznają różne twierdzenia z matematyki elementarnej, które nie mieszczą się w obecnych programach szkolnych. Uwzględniona jest tu perspektywa stopniowego rozszerzania podstawy programowej oraz standardy obowiązujące uczestników analogicznych konkursów na całym świecie. Treści programu merytorycznego Olimpiady wskazują ambitną perspektywę rozwoju matematycznego ucznia, który nie tylko zgłębił w sposób wszechstronny treści przedstawione w szkole, ale także poznał i zrozumiał pewne ich konsekwencje, nie korzystając z narzędzi czy metod stosowanych na dalszym etapie edukacyjnym. Uczeń taki potrafi w twórczy sposób wykorzystać poznaną wiedzę do rozwiązywania nieszablonowych zadań. Ułatwia mu to start w Olimpiadzie Matematycznej dla uczniów szkół ponadpodstawowych, a także późniejszą naukę matematyki — także na etapie studiów wyższych.

Liczby całkowite

1. Liczby naturalne w dziesiętnym systemie pozycyjnym. Cyfra jedności, dziesiątek, setek, itd.
2. Podzielność liczb całkowitych; dzielniki i wielokrotności. Dzielniki właściwe. Cechy podzielności związane z zapisem w dziesiętnym systemie pozycyjnym, w tym cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 100.
3. Liczby pierwsze. Rozkład liczby całkowitej dodatniej na czynniki pierwsze. Rozpoznawanie kwadratów oraz sześciątów po tym jaki jest ich rozkład na czynniki.
4. Największy wspólny dzielnik (NWD) i najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) liczb całkowitych. Liczby względnie pierwsze. Podstawowe elementy algorytmu Euklidesa.
5. Liczby całkowite. Liczby dodatnie i ujemne. Znak liczby całkowitej.
6. Dzielenie z resztą liczb całkowitych przez liczby całkowite niezerowe. Liczby parzyste i nieparzyste. Związek pomiędzy resztami z dzielenia sumy (odpowiednio: iloczynu) liczb całkowitych przez daną liczbę, a resztami z dzielenia przez tą liczbę poszczególnych składników tej sumy (odpowiednio: czynników tego iloczynu).

Liczby wymierne, proporcjonalność i obliczenia procentowe

1. Ułamki dziesiętne. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych. Mnożenie i dzielenie ułamków dziesiętnych przez 10, 100, 1000 itd. Porównywanie ułamków dziesiętnych.
2. Przedstawianie ilorazu w postaci ułamka zwykłego; licznik, mianownik, kreska ułamkowa. Skracanie i rozszerzanie ułamków. Ułamki nieskracalne. Sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika.
3. Dodawanie i odejmowanie ułamków zwykłych. Mnożenie i dzielenie ułamków zwykłych przez liczbę naturalną. Ułamki danej liczby naturalnej. Porównywanie ułamków zwykłych. Zamiana ułamków dziesiętnych na ułamki zwykłe i przykłady działania odwrotnego.
4. Rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych, ułamki okresowe.
5. Liczby wymierne. Suma, różnica, iloraz i iloczyn liczb wymiernych.
6. Proporcjonalność prosta, współczynnik proporcjonalności. Stosowanie proporcji i jej własności. Proporcjonalność odwrotna. Procent, obliczenia procentowe, obliczanie procentu danej liczby oraz liczby na podstawie danego jej procentu. Wykonywanie obliczeń dotyczących jednokrotnej podwyżki lub obniżki wielkości o dany procent, a także wielokrotnych podwyżek i obniżek wielkości o dany procent.

Potęgowanie i pierwiastkowanie. Liczby niewymierne

1. Podstawa i wykładnik potęgowania. Mnożenie i dzielenie potęg o tej samej podstawie. Mnożenie i dzielenie potęg o tym samym wykładniku. Potęgowanie potęgi.
2. Potęgi całkowite liczb całkowitych dodatnich. Odczytywanie i zapisywanie liczby w notacji wykładniczej.
3. Pierwiastki. Stopień pierwiastka. Mnożenie i dzielenie pierwiastków tego samego stopnia. Wylączenie czynnika przed znak pierwiastka. Włączenie liczby pod znak pierwiastka. Przekształcanie wyrażeń zawierających potęgi i pierwiastki.
4. Szacowanie wielkości danego pierwiastka lub wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki, porównywanie wartości wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajdowanie liczby wymiernej większej lub mniejszej od takiego wyrażenia arytmetycznego.

5. Liczby niewymierne. Niewymierność liczb $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, itd.
6. Zachowywanie się własności wymierności i niewymierności przy dodawaniu i mnożeniu liczb. Usuwanie niewymierności z mianownika.
7. Nieokresowość rozwinięcia dziesiętnego liczby niewymiernej. Zaokrąglanie liczby zapisanej w systemie dziesiętnym z zadaną dokładnością.

Liczby rzeczywiste i ich interpretacja geometryczna

1. Liczby rzeczywiste i ich przedstawienie na osi liczbowej. Zapis dziesiętny liczby rzeczywistej. Porównywanie liczb rzeczywistych. Średnia arytmetyczna.
2. Znak liczby rzeczywistej. Wartość bezwzględna (inaczej: moduł) liczby rzeczywistej. Interpretacja wartości bezwzględnej na osi liczbowej. Proste równania i nierówności z modułami, także z wykorzystaniem znaczenia geometrycznego.
3. Znak sumy i iloczynu liczb rzeczywistych. Liczby przeciwne. Liczby wzajemnie odwrotne.
4. Równania i nierówności. Dodawanie do obu stron równania lub nierówności tego samego wyrażenia, mnożenie i dzielenie obu stron przez tę samą liczbę. Dodawanie i mnożenie stron równości i nierówności.

Operacje i wyrażenia algebraiczne

1. Składnik, suma, różnica, czynnik, iloczyn, iloraz.
2. Zapisywanie zależności przedstawionych w zadaniach w postaci wyrażen algebraicznych jednej lub kilku zmiennych.
3. Wartość liczbową wyrażenia algebraicznego.
4. Przekształcanie wyrażen algebraicznych, doprowadzanie do najprostszej postaci, wyznaczanie niewiadomych z równań.
5. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie sum algebraicznych. Redukcja wyrazów podobnych.
6. Rozkład wyrażen algebraicznych na czynniki, wyłączanie przed nawias.
7. Skrócone sposoby mnożenia, m.in. wzory na kwadrat sumy i różnicy oraz na różnicę kwadratów.
8. Najprostsze techniki rozwiązywania układów równań (metoda podstawiania, dodawania lub odejmowania stronami, manipulacje na równaniach, itp.) Sprawdzanie czy dany układ liczb jest rozwiązaniem.
9. Zadania tekstowe prowadzące do prostych równań oraz nierówności.

Geometria – punkty, proste, płaszczyzny i ich wzajemne położenie

1. Punkt. Odcinek. Środek i końce odcinka. Łamana otwarta i zamknięta. Prosta i półprosta.
2. Kąt, ramiona i wierzchołek. Jednostki miary kąta. Kąt ostry, rozwarty, prosty. Kąt wypukły, wklęsły, pełny i półpełny. Porównywanie kątów.
3. Odcinki równoległe, odcinki prostopadłe. Proste równoległe i prostopadłe. Kąty wierzchołkowe i przyległe. Dopełnienie kąta. Dwusieczna kąta.
4. Odległość punktów na płaszczyźnie. Odległość punktu od prostej. Długość łamanej.

Geometria – wielokąty

1. Trójkąt ostrokątny, prostokątny i rozwartokątny. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne (zwłaszcza w kontekście tzw. trójkątów charakterystycznych). Nierówność trójkąta i jej zastosowania. Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta. Środkowa i środek ciężkości w trójkącie. Linia środkowa w trójkącie. Środek przeciwprostokątnej i jego własności.
2. Czworokąt, trapez, równoległobok, prostokąt, romb, kwadrat, deltoid. Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta. Charakteryzacja równoległoboków wśród innych czworokątów (także dotycząca przekątnych).
3. Boki i obwód wielokąta. Kąt wewnętrzny i zewnętrzny w wielokącie. Wielokąty wypukłe i wklęsłe. Przekątna wielokąta. Wielokąty foremne.
4. Wysokość trójkąta, wysokość równoległoboku, wysokość trapezu. Pole prostokąta, trójkąta, równoległoboku i trapezu. Pole wielokąta. Jednostki pola.
5. Cechy przystawiania trójkątów. „Czwarta cecha” przystawiania trójkątów.
6. Cechy podobieństwa trójkątów. Twierdzenie Talesa i podobieństwo w prostych konfiguracjach (np. gdy dane są proste równoległe lub wysokość w trójkącie prostokątnym).

Geometria – okręgi

1. Okrąg i koło, środek, promień, średnica, cięciwa i łuk.
2. Kąt środkowy, kąt wpisany. Związek między kątem środkowym i kątem wpisanym opartych na tym samym łuku okręgu. Kąt wpisany oparty na półokręgu.
3. Prosta styczna do okręgu i jej najprostsze własności (np. prostopadłość do promienia). Okręgi styczne i własności ich punktów styczności (np. ich przynależność do prostej zawierającej środkę okręgów stycznych, o ile nie są one identyczne). Proste zastosowania twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu poprowadzonych z danego punktu na zewnątrz okręgu.
4. Okrąg wpisany i opisany na wielokącie. Środek okręgu wpisanego i środek okręgu opisanego na trójkącie. Kryteria wpisawalności i opisywalności okręgu na czworokącie wypukłym.
5. Obwód i pole koła. Liczba π .

Geometria – proste przekształcenia

1. Figury symetryczne względem prostej, oś symetrii. Oś symetrii figury, symetralna odcinka. Figury symetryczne względem punktu, środek symetrii. Środek symetrii figury. Środek i oś symetrii wielokąta foremnego.
2. Powiększanie i pomniejszanie figur geometrycznych w danej skali. Figury podobne, skala podobieństwa. Stosunek pól figur podobnych.
3. Obrót dookoła punktu na płaszczyźnie. Rzut punktu na prostą. Odbicie symetryczne punktu względem prostej.
4. Rzut punktu i prostej na płaszczyznę (także w przestrzeni).

Geometria w przestrzeni

1. Punkty, odcinki, proste i płaszczyzny w przestrzeni.
2. Kąt prostej z płaszczyzną. Prostopadłość dwóch płaszczyzn.
3. Wielościan wypukły, czworościan, sześcián, prostopadłościan, równoległościan, graniastosłup, ostrosłup. Ściany, krawędzie i wierzchołki. Krawędzie i ściany równoległe, krawędzie skośne, krawędzie i ściany prostopadłe.
4. Graniastosłup i ostrosłup prosty lub prawidłowy. Podstawa i ściany boczne graniastosłupa i ostrosłupa. Wysokość ostrosłupa i graniastosłupa.
5. Obliczanie pól powierzchni i objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Jednostki objętości. Bryły obrotowe: walec, stożek i kula.
6. Siatka wielościanu wypukłego. Przekroje wielościanów i brył obrotowych płaszczyzną.
7. Kula wpisana i opisana na wielościanie wypukłym. Płaszczyzna styczna do kuli.

Elementy teorii zbiorów, kombinatoryki

1. Zbiór i podzbiór. Elementy zbioru. Zbiór pusty. Suma i część wspólna zbiorów. Zbiory rozłączne. Liczba elementów zbioru. Podzbiór o maksymalnej lub minimalnej liczbie elementów.
2. Rozbicie zbioru i jego proste konsekwencje (np. tzw. zasada szufladkowa Dirichleta). Pary i trójki elementów. Elementy różne i parami różne. Reguła dodawania i reguła mnożenia.
3. Interpretacja warunków podanych w zadaniach tekstowych w języku zbiorów i relacji między nimi (np. zbiór rozwiązań równania czy nierówności, zbiór znajomych, graczy, zawodników czy też zbiór punktów lub pól szachownicy o danym kolorze, tzw. graf znajomości).
4. Porządek w prostych podzbiorach liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych. Największy i najmniejszy element. Proste zastosowania tzw. zasady dobrego porządku.

Wykaz literatury przydatnej w przygotowaniach do OMJ

1. Podręczniki do matematyki dopuszczone przez MEiN do użytku w szkole podstawowej oraz spójne z tymi podręcznikami zbiory zadań.
2. Rozwiązania zadań z poprzednich edycji Olimpiady Matematycznej Juniorów, dostępne pod adresem: <https://omj.edu.pl/zadania>.
3. Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów „Kwadrat”, numery 1-23, dostępne pod adresem: <https://omj.edu.pl/gazetka-omj>.
4. Publikacje Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, dostępne pod adresem: <https://omj.edu.pl/publikacje-omg>.
5. Publikacje z serii „Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej”.
6. Bednarczuk J., Bednarczuk J., *Matematyczne gwiazdki*, Wydawnictwo Aksjomat 2019.
7. Bobiński Z., Nodzyński P., Uscki M., *Koło matematyczne w gimnazjum*, Wydawnictwo Aksjomat 2010.
8. Dyda B., Romanowicz Z., *Zadania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg 2012.
9. Guzicki W., *Rozszerzony program matematyki w gimnazjum*, ORE 2013.
10. Pawłowski H., *Olimpiady i konkursy matematyczne*, Wydawnictwo Tutor 2017.