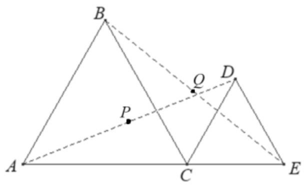
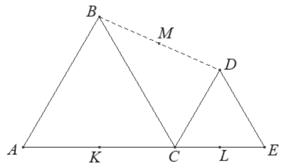
Zadania na wstępie



i. Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej.
a) Wykaż, że odcinki AD i BE są równe, a kąt ostry, pod którym się przecinają jest równy 60°.
b) Punkty P i Q są środkami odcinków, odpowiednio, AD i BE (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty C, P i W są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
Wskazówka. Rozpatrz obrót wokół punktu C o kąt 60°.
c) Punkty K, L i M są środkami odcinków - odpowiednio - AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty K, L i M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.
Wskazówka. Skorzystaj z własności linii środkowej w odpowiednio dobranych trójkątach.



ii. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, którego bok ma długość a. Odległości punktu P od boków AB, BC, CA są równe, odpowiednio, x, y, z. Wykaż, że suma $x + y + z$ nie zależy od wyboru punktu P.
Wskazówka. Zapisz wzór na pole trójkąta ABC z wykorzystaniem liczb x, y, z.

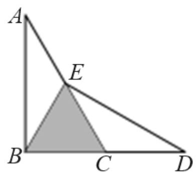
iii. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie kąty mają jednakową miarę. Wykaż, że prawdziwa jest równość $AB + AF = DC + DE$.
Wskazówka. Rozpatrz trójkąt o wierzchołkach w punktach przecięcia się każdej z par prostych wybranych spośród trzech prostych: AB, CD i EF.

Zadania do rozwiązania

1. (**15th Hanoi Open Mathematics Competition – 2018/z7**) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach A i C są proste, $\angle ABC = 105°$, $AB = 2$ oraz $BC = CD = DE = \sqrt{2}$. Oblicz długość boku AE.

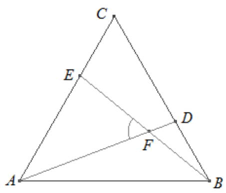
2. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 120°, a środkowa CD jest prostopadła do boku BC. Oblicz stosunek długości $AC : BC$.

3. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC leży taki punkt P, którego odległości od boków AB i AC są równe, odpowiednio, $d_1 = 5$, $d_2 = 3$. Oblicz długość odcinka AP.



4. W przystających trójkątach ABC i DEB kąty przy wierzchołkach B oraz E są proste. Wierzchołek C trójkąta ABC leży na przeciwprostokątnej trójkąta DEB, a także wierzchołek E trójkąta BED leży na przeciwprostokątnej trójkąta ABC (zobacz rysunek). Udowodnij, że trójkąt BCE jest równoboczny.

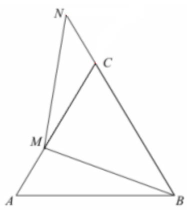
5. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC wybrano punkty, odpowiednio, K, L i M tak, że $AK = BL = CM$. Wykaż, że trójkąt KLM jest równoboczny.



6. W trójkącie równobocznym ABC na bokach BC i CA wybrano takie punkty, odpowiednio, D i E, że $BD = CE$. Odcinki BE i AD przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że $\angle AFE = 60°$.

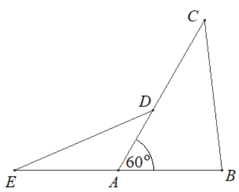
7. W rombie $ABCD$ kąt przy wierzchołku A jest równy 60°. Na bokach AB i BC leżą takie punkty, odpowiednio E i F, że $AE = BF$. Wykaż, że trójkąt DEF jest równoboczny.

8. Dany jest romb $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A jest ostry i większy od 60°. Wewnątrz tego rombu istnieje taki punkt E, że trójkąt ABE jest równoboczny. Na zewnątrz rombu $ABCD$ wybrano taki punkt F, że trójkąt BCF jest równoboczny. Wykaż, że punkt E leży na prostej DF.



9. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe.
a) Na boku AC wybrano punkt M tak, że $BM = MN$. Wykaż, że $AM = CN$.
b) Na boku AC wybrano punkt M tak, że $AM = CN$. Wykaż, że $BM = MN$.

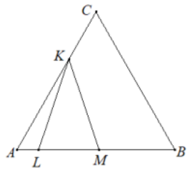
10. W trójkącie ostrokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest równy 60°. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów, odpowiednio, A na prostą BC oraz B na prostą AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt DEM jest równoboczny.



11. W trójkącie ABC bok AC jest dłuższy od boku AB, a kąt przy wierzchołku A ma miarę 60°. Na boku AC leży taki punkt D, że $CD = AB$. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem punktu A (zobacz rysunek). Wykaż, że $BC = DE$.

12. Trójkąt ABC jest równoboczny. Na przedłużeniu boku AC poza punkt C wybrano punkt D, a na przedłużeniu boku BC poza punkt C wybrano punkt E tak, że $BD = DE$. Wykaż, że $AD = CE$.

13. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma 120°. Na dwusiecznej tego kąta leży taki punkt D, że $AD = AB + AC$. Udowodnij, że trójkąt DBC jest równoboczny.



14. W trójkącie równobocznym ABC na boku AC leży punkt K, a na boku AB takie punkty L i M, że $AL < AM$ oraz $KL = KM$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $CK + AL = MB$.

15. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC oraz $\angle AMC = 60°$. Na środkowej AM leży taki punkt K, że $AK = BM$. Wykaż, że $AC = BK$.

16. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Oznaczamy przez A_0, B_0, C_0 środki boków, odpowiednio, BC, CA i AB. Odcinki AB_0 oraz BA_0 są bokami trójkątów równobocznych AB_0C_1 oraz BA_0C_2, takich, które leżą na zewnątrz trójkąta ABC (tzn. częścią wspólną danego trójkąta i każdego z trójkątów równobocznych AB_0C_1 oraz BA_0C_2 są odcinki, odpowiednio, AB_0 oraz BA_0). Oblicz miarę kąta $C_0C_1C_2$.

17. Punkty D i E leżą na bokach, odpowiednio, BC i AB trójkąta równobocznego ABC, przy czym $BE = CD$. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Wykaż, że $BM = ½\, AD$.

18. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości: $\angle BAD + \angle ADC = 120°$ oraz $AB = CD$. Punkty E i F są środkami przekątnych, odpowiednio, AC i BD. Wykaż, że $EF = ½\, AB$.

19. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC leży taki punkt M, że proste AM i CM przecinają boki BC i BA w punktach, odpowiednio, L i K, przy czym pole trójkąta AMC jest równe polu czworokąta $LBKM$. Znajdź kąt AMC.

20. W trójkącie ABC poprowadzono środkowe AD i BE, po czym okazało się, że kąty CAD i CBE mają miarę 30°. Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

21. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że $\angle PAB = \angle PBA = 15°$. Rozstrzygnij, czy trójkąt CDP jest trójkątem równobocznym.

22. W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego jest cztery razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz kąty tego trójkąta.

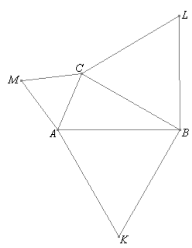
23. Wysokość i środkowa, poprowadzone z jednego wierzchołka trójkąta podzieliły kąt wewnętrzny przy tym wierzchołku na trzy równe części. Oblicz kąty tego trójkąta.

24. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano takie punkty, odpowiednio, D i E, że $BD = AE = \frac{1}{3}AB$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

25. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 120°. Na zewnątrz tego trójkąta zbudowano trójkąty równoboczne ABD, BCE i CAF. Wykaż, że pole trójkąta BCE jest równe sumie pól trójkątów ABC, BDA i CAF.

26. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano takie punkty, odpowiednio, D i E, że $BD = AE = \frac{1}{3}AB$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że kąt APC jest prosty.

27. W trójkącie ABC boki AC i BC są równe, a kąt ACB ma miarę 102°. Wewnątrz tego trójkąta leży taki punkt M, że $\angle MBA = 9°$ i $\angle MCB = 21°$. Wykaż, że kąt AMC ma miarę 81°.



28. Na bokach trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano trójkąty równoboczne ABK, BCL i CAM (zobacz rysunek). Wykaż, że odcinki CK, AL i BM są parami równe.

29. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P na proste, odpowiednio, BC, CA, AB. Wykaż, że $AF + BD + CE = AE + BF + CD$.

30. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt $O \neq G$, gdzie G jest środkiem ciężkości (czyli punktem, w którym przecinają się środkowe) trójkąta ABC. Prosta OG przecina proste AB, AC, BC w punktach, odpowiednio, D, E, F. Wykaż, że $\frac{DO}{DG} + \frac{EO}{EG} + \frac{FO}{FG} = 3$.

31. Boki trójkąta mają długości a, b, c, a wysokości opuszczone na te boki mają długości, odpowiednio, h_1, h_2, h_3 . Wykaż, że jeśli zachodzi równość $a + h_1 = b + h_2 = c + h_3$, to rozpatrywany trójkąt jest równoboczny.

32. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg. Punkt P leży na łuku BC (niezawierającym punktu A) tego okręgu. Wykaż, że $AP = BP + CP$.

33. Trójkąt równoboczny ABC o boku długości 6 wpisano w okrąg. Punkt P leżący na łuku AC (niezawierającym punktu B) tego okręgu jest taki, że $AP \cdot PC = 13$. Oblicz BP.

34. **(IX mOM/II/z2)** Odcinki AB i AC są dwoma kolejnymi bokami dziewięciokąta foremnego wpisanego w okrąg o środku O. Punkty M, N i P są środkami, odpowiednio, boku AB, krótszego łuku BC i odcinka ON. Oblicz miarę kąta OMP.

35. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg. Punkty D i E to środki krótszych łuków AC i BC tego okręgu. Wykaż, że boki AC i BC dzielą cięciwę DE na trzy równe części.

36. Przez wierzchołek A trójkąta równobocznego ABC poprowadzono prostą, która nie przecina odcinka BC. Na tej prostej znajdują się takie punkty M i N, że punkt A jest środkiem odcinka MN, punkt B leży wewnątrz kąta MAC, a także $MN = 2 \cdot BC$. Oblicz miarę kąta rozwartego utworzonego przez proste BN i CM.

37. Na zewnątrz rombu $ABCD$ zbudowano drugi romb $BCEF$, w którym $\angle BFE = 60°$. Odcinki AC i DE przecinają się w punkcie P. Oblicz miarę kąta APD.

38. Dane są trzy proste równoległe a, b, c. Wykaż, że niezależnie od odległości między tymi prostymi da się zbudować taki trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą na danych prostych (na każdej prostej jeden wierzchołek).

39. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC leży taki punkt P, że $\angle BPC = 150°$. Wykaż, że $AP^2 + BP^2 = CP^2$.

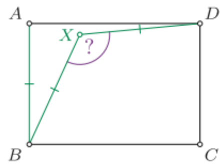
40. Na krótszym łuku AC okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC leży punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a środkiem tego łuku jest punkt P. Oznaczmy przez N środek cięciwy BM, a przez K – rzut prostokątny punktu P na MC. Udowodnij, że trójkąt ANK jest równoboczny.

41. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC leży punkt P. Wiedząc, że $AP = 8$, $BP = 15$, $CP = 17$, oblicz pole trójkąta ABC.

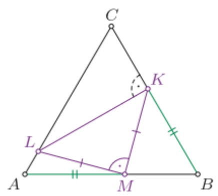
42. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach AC i BC wybrano takie punkty, odpowiednio, D i E, że $AB = BD = DE$ oraz $AD = CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

43. W pięciokącie $ABCDE$ wszystkie boki są równe, a kąt ABC jest dwa razy większy od kąta DBE. Wyznacz miarę kąta ABC.

44. **(XVI OMJ/I/z4)** Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\angle DAB = \angle ABC = 120°$ oraz $CD = 3$, $BC = 2$, $AB = 1$. Oblicz długość odcinka AD.



45. **(XVII OMJ/I/z2)** W prostokącie $ABCD$ stosunek długości boków $BC{:}AB$ jest równy $\sqrt{2}$. Wewnątrz tego prostokąta zaznaczono taki punkt X, że $AB = BX = XD$ (zobacz rysunek). Wyznacz miarę kąta BXD.



46. **(XVII OMJ/I/z5)** Punkty K, L, M leżą na bokach, odpowiednio, BC, CA, AB trójkąta równobocznego ABC i spełniają warunki $KM = LM$, $\angle KML = 90°$ oraz $AM = BK$. Udowodnij, że $\angle CKL = 90°$.

47. **(XVII OMJ/III/z3)** Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\angle ABD = 90°$ oraz $\angle CBD = 45°$. Punkt E leży na odcinku AD, przy czym $BC = CE$. Wyznacz miarę kąta BCE.

48. (**XVIII OMJ/III/z3**) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC < BC$ oraz $\angle ACB = 60°$. Punkt D, różny od A, leży na odcinku AC, przy czym $AB = BD$, a punkt E, różny od B, leży na prostej BC, przy czym $AB = AE$. Wykaż, że $\angle DEC = 30°$.

49. (**II OMG/I/z4**) W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\angle ACB = 120°$. Udowodnij, że

$$CM \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot AB$$

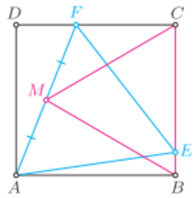
50. (**II OMG/II/z4**) Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120°. Udowodnij, że symetralne boków AB, CD, EF tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

51. (**III OMG/II/z2**) Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

52. (**V OMG/II/z2**) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $\angle BAD = \angle ABC = 60°$ oraz $CD < BC$. Na boku BC tego trapezu wybrano taki punkt E, że $EB = CD$. Wykaż, że $BD = AE$.

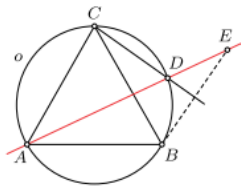
53. (**V OMG/III/z3**) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P względem prostych, odpowiednio, BC, CA, AB. Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

54. (**VIII OMG/III/z3**) Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 120°$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano takie punkty, odpowiednio, P i Q, że $AP = PQ = QB$. Wykaż, że $\angle PMQ = 90°$.

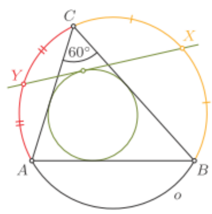


55. (**IX OMG/I/z3**) Punkty E i F leżą na bokach, odpowiednio, BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF. Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny.

56. (**X OMG/II/z5**) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

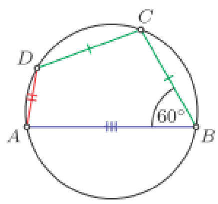


57. (**X OMG/I/z2**) Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.



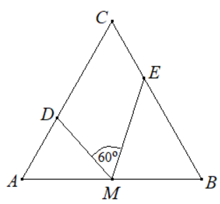
58. (**XI OMG/I/z4**) Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 60°$. Na trójkącie tym opisano okrąg o. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A, a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o, który nie zawiera punktu B. Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

59. (**XI OMG/III/z3**) Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M. Wykaż, że $BQ = PQ$.



60. (**XII OMG/I/z4**) Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\angle ABC = 60°$ oraz $BC = CD$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $AB = AD + DC$.

61. (**XIII OMG/III/z4**) Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą na odcinkach – odpowiednio – AC i BC, przy czym $\angle DME = 60°$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB$.



62. (**XLVII OM/I/z4**) Prosta styczna do okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC przecina boki AB i AC w punktach, odpowiednio, $D \neq B$ i $E \neq C$. Udowodnij, że $\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$.