Nieokresowe rozwinięcia

Zdalne seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
8-9.05.2020 r., platforma Zoom

Zadanie 1. *Dana jest liczba* $x \in (0,1)$*, dla której kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego po przecinku są (czytanymi od lewej) cyframi w zapisie dziesiętnym kolejnych liczb naturalnych:* $x = 0{,}123456789101112131415\ldots$ *Pokazać, że* x *jest liczbą niewymierną.*

Zadanie 2. *Jaka jest najmniejsza liczba różnych cyfr, które muszą występować nieskończenie wiele razy w rozwinięciu dziesiętnym liczby niewymiernej?*

Zadanie 3. *Porównując zapisy dziesiętne liczb całkowitych dodatnich pokazać niewymierność liczby* $\sqrt{2}$.

Zadanie 4. *Liczba rzeczywista* $x \notin \{-1,0,1\}$ *ma tę własność, że zarówno* x *jak i jej odwrotność* $\frac{1}{x}$ *mają identyczne rozwinięcia dziesiętne po przecinku. Pokazać, że* x *jest liczbą niewymierną.*

Zadanie 5. *Na* n*-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby* x *znajduje się cyfra jedności liczby* a^n*, gdzie* a *jest pewną ustaloną liczbą całkowitą dodatnią oraz* n *przebiega wszystkie liczby całkowite dodatnie. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Zadanie 6. *Na* $2n-1$*-wszym i* $2n$*-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby* x *znajdują się odpowiednio cyfra dziesiątek i cyfra jedności liczby* $(n+3)^2$*, dla każdego* $n \geqslant 1$*. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Zadanie 7. *Na* n*-tym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby* x *znajduje się cyfra jedności liczby* $1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n$*, dla każdego* $n \geqslant 1$*. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Zadanie 8. *Dane są liczby dodatnie* x, y*, mniejsze od 1 i takie, że* n*-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby* y *jest* 2^n*-tą cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby* x*. Pokazać, że jeśli* x *jest liczbą wymierną, to* y *też jest liczbą wymierną.*

Zadanie 9. *Liczby* a, b *są całkowite dodatnie, przy czym* a *jest nieparzysta. Określamy ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *rekurencją o warunku początkowym* $a_1 = b$ *i określoną dla* $n \geqslant 1$ *wzorem:*

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{gdy } a_n \text{ jest parzysta,} \\ a_n + a, & \text{gdy } a_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Niech $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *będzie liczbą rzeczywistą, której rozwinięcie dziesiętne zawiera na* n*-tym miejscu po przecinku cyfrę jedności liczby* a_n*, dla* $n \geqslant 1$*. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

Zadanie 10. *Określamy ciąg* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *warunkami:*

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli liczba dzielników dodatnich liczby } n \text{ jest nieparzysta,} \\ 1, & \text{jeśli liczba dzielników dodatnich liczby } n \text{ jest parzysta.} \end{cases}$$

Niech $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ *będzie liczbą rzeczywistą, której rozwinięcie dziesiętne zawiera na* n*-tym miejscu po przecinku cyfrę* a_n*, dla* $n \geqslant 1$*. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

* * *

Przez $\mathrm{onc}(x)$ oznaczamy ostatnią niezerową cyfrę w rozwinięciu dziesiętnym liczby całkowitej dodatniej.

Zadanie 11. *Udowodnić, że jeśli* a, b *są liczbami całkowitymi oraz* $\mathrm{onc}(a) \neq 5$ *i* $\mathrm{onc}(b) \neq 5$*, wówczas* $\mathrm{onc}(ab)$ *równa jest cyfrze jedności liczby* $\mathrm{onc}(a) \cdot \mathrm{onc}(b)$.

Zadanie 12. *Wykazać, że* $\mathrm{onc}(n!)$ *równe jest cyfrze jedności liczby*

$$2^x \cdot \mathrm{onc}(x!) \cdot y!,$$

gdzie $n = 5x + y$*, przy czym* x *jest liczbą całkowitą nieujemną oraz* $0 \leqslant y < 5$.

Zadanie 13. *Dana jest liczba* $x \in (0,1)$*, która na* n*-tym miejscu po przecinku ma cyfrę równą* $\mathrm{onc}(n!)$*. Rozstrzygnąć czy* x *jest liczbą wymierną, czy liczbą niewymierną.*

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej