Zliczanie dzielników

Zdalne seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel
22-23.05.2020 r., platforma Zoom

Zadanie 1. *Znajdź liczbę całkowitą dodatnią mającą cztery dzielniki dodatnie, jeśli wiadomo, że jednym z tych dzielników jest 49.*

Zadanie 2. *Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie podzielne przez* 5 *i mające dokładnie* 5 *dzielników naturalnych.*

Zadanie 3. *Wykaż, że dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 4. *Liczby całkowite dodatnie a oraz b mają odpowiednio po 99 oraz 101 dodatnich dzielników. Czy iloczyn ab może mieć dokładnie 150 dodatnich dzielników?*

Zadanie 5. *Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba p^2+11 ma dokładnie sześć dzielników dodatnich.*

Zadanie 6. *Niech a będzie najmniejszą oraz A – największą z n parami różnych liczb całkowitych dodatnich. Pokaż, że najmniejsza wspólna wielokrotność owych n liczb jest nie mniejsza niż iloczyn $n \cdot a$ oraz, że największy wspólny dzielnik owych n liczb jest nie większy niż iloraz $\frac{A}{n}$.*

Zadanie 7. *Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od* 1 *do* 1000*, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez* 3 *itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik* 1000 *razy?*

Zadanie 8. *Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite podzielne przez* 100*, które mają* 15 *dzielników.*

Zadanie 9. *Czy liczba o dokładnie* $100!$ *dzielnikach dodatnich może być sześcianem liczby całkowitej?*

Zadanie 10. *Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeśli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.*

Zadanie 11. *Czy istnieje taka liczba całkowita $n > 2$, że liczba $n!$ ma dokładnie* 101 *dodatnich dzielników?*

Zadanie 12. *Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy białą, jeżeli jest równa* 1 *lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy czarnymi. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.*

Zadanie 13. *Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $f(n)$ oznacza liczbę dzielników dodatnich liczby n, których cyfry jedności to* 1 *lub* 9*, oraz niech $g(n)$ oznacza liczbę dzielników dodatnich liczby n, których cyfra jedności to* 3 *lub* 7*. Udowodnić, że $f(n) \geqslant g(n)$.*

Wybrane źródła:

1. Gazetki OMJ *Kwadrat* #11, #12, dostępne pod adresem `www.omj.edu.pl`.
2. Archiwum Olimpiady Matematycznej, dostępne pod adresem `https://archom.ptm.org.pl/`.
3. Art of Problem Solving Contest Collections, dostępne pod adresem `https://artofproblemsolving.com/`.
4. Titu Andreescu, Razvan Gelca: *Mathematical Olympiad Challenges*, Second Edition, Birkhäuser 2009.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej