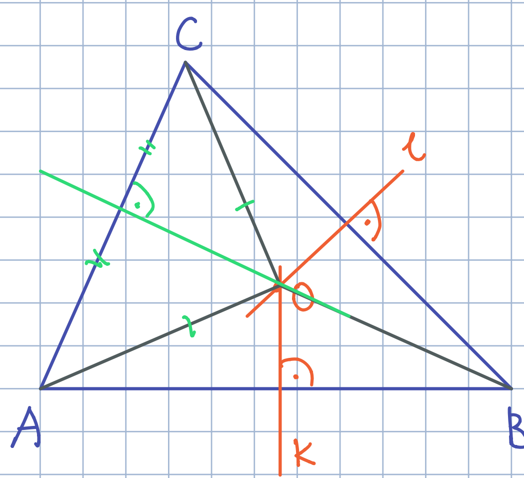
Symetralne, dwusieczne, wysokości – Waldemar Pompe

Seminarium olimpijskie OMJ, 4-5.09.2020 r.

Tw. W dowolnym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie



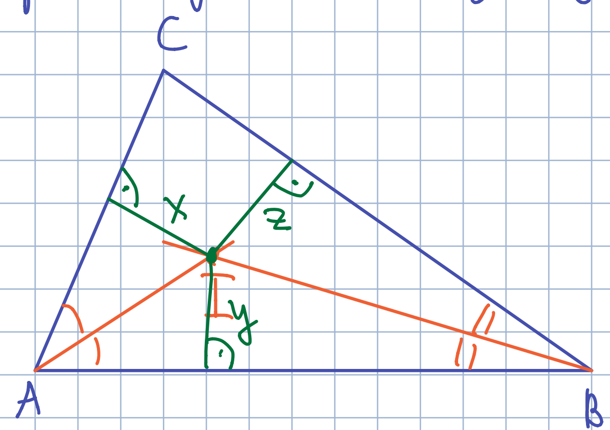
Dowód:

Niech $O = k \cap l$.

$OA = OB$, $OB = OC \Rightarrow OA = OC$

$\Rightarrow$ O leży na symetralnej odcinka AC.

Tw. W dowolnym trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie.



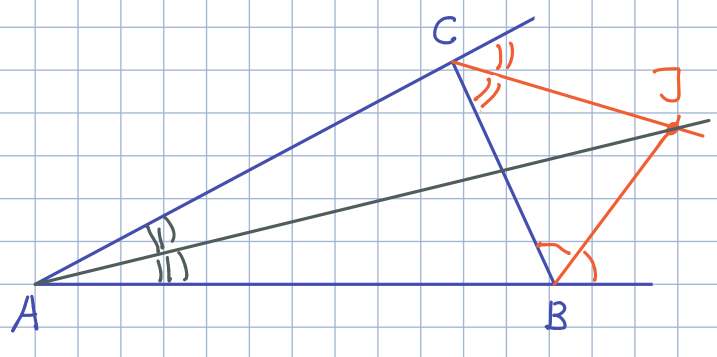
Dowód:

I – p. przecięcia dwusiecznych $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$.

$x = y$, $y = z \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow$ I leży na dwusiecznej $\sphericalangle C$.

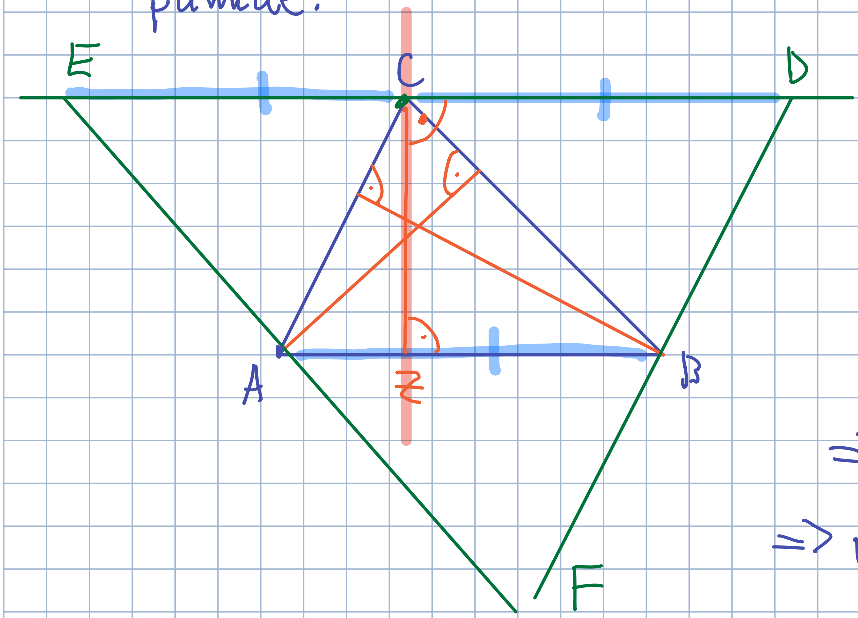
Tw. W dowolnym trójkącie dwusieczne dwóch kątów zewnętrznych i trzeciego wewnętrznego przecinają się w jednym punkcie.



Dowód:

j.w.

Tw. W dowolnym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie.



Dowód:

$DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $FD \parallel AC$

$EC = AB = CD$

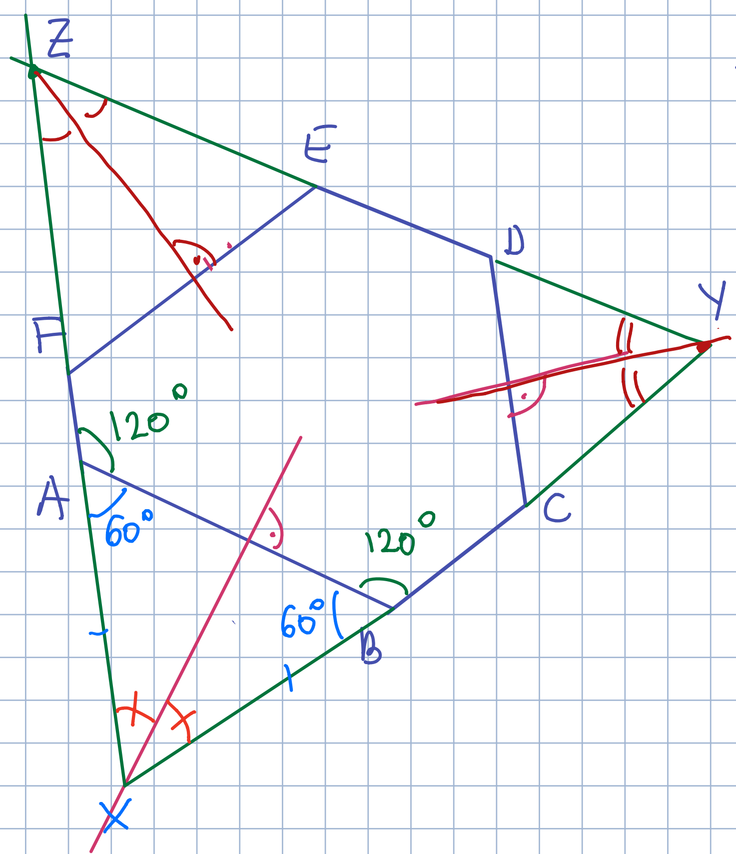
$CZ \perp DE$

$\Rightarrow$ CZ – symetralna boku DE

$\Rightarrow$ wysokości $\triangle ABC$ $\equiv$ symetralne boków $\triangle DEF$.

Zad. 1

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \ldots = \sphericalangle F = 120^\circ$. Wykazać, że symetralne odcinków AB, CD, EF przecinają się w jednym punkcie.



Rozw.

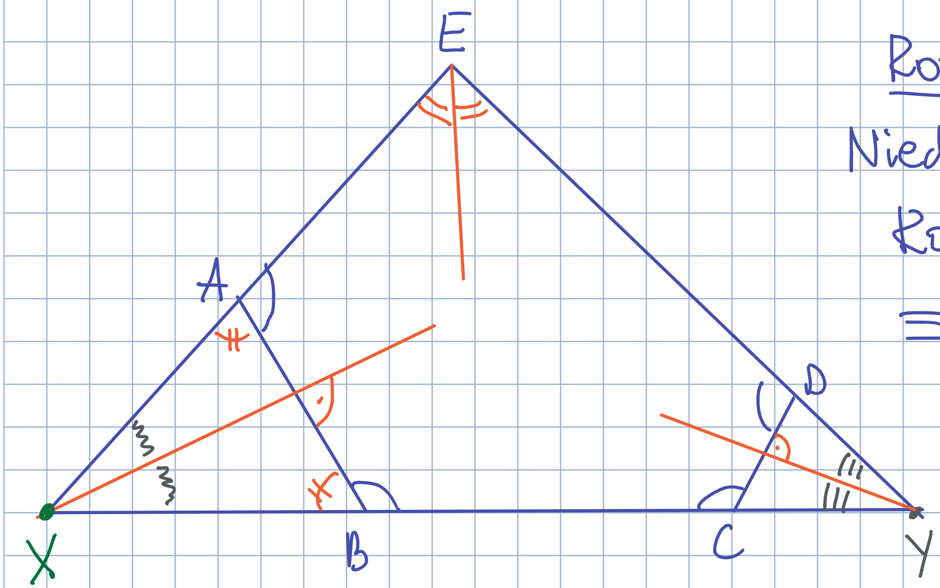
Niech $X = FA \cap BC$, $Y = BC \cap DE$, $Z = DE \cap FA$.

$\triangle ABX$ – równoramienny

Rozpatrywane symetralne $\equiv$ dwusieczne kątów $\triangle XYZ$.

Zad. 2

Dany jest pięciokąt wypukły ABCDE, w którym $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D > 90°$. Wykazać, że symetralne odcinków AB, CD i dwusieczna $\sphericalangle E$ przecinają się w jednym punkcie.



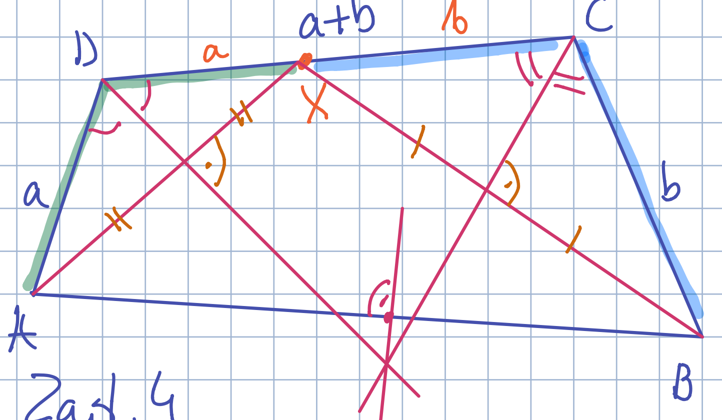
Rozw.

Niech $X = EA \cap BC$, $Y = BC \cap DE$.

Rozpatrywane proste $\equiv$ dwusieczne kątów $\triangle XYE$.

Zad. 3

Dany jest czworokąt wypukły, w którym $AD + BC = CD$. Wykazać, że dwusieczne $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle D$ oraz symetralna odc. AB przecinają się w jednym punkcie.



Rozw.

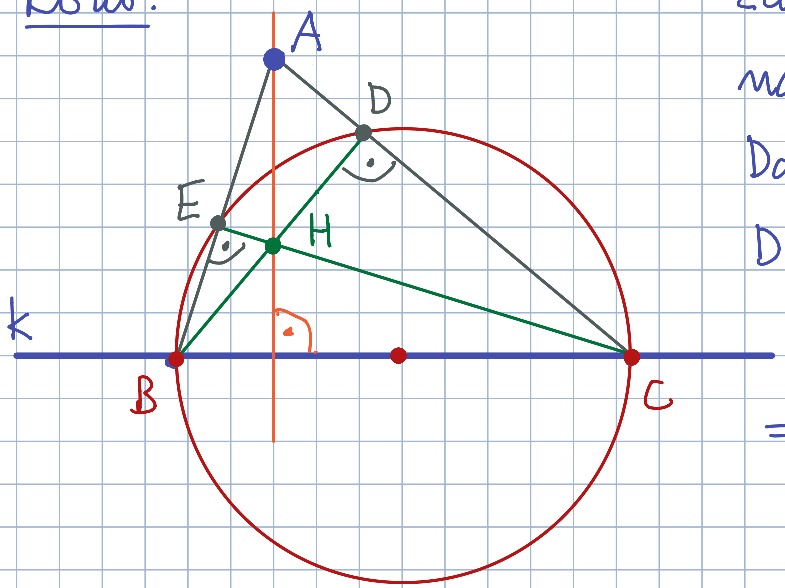
Niech X na boku CD, że $DX = DA \Rightarrow CX = CB$.

Rozpatrywane proste $\equiv$ symetralne boków $\triangle ABX$.

Zad. 4

Dana jest prosta k oraz punkt $A \notin k$. Przy pomocy cyrkla i linijki poprowadzić przez A prostą prostopadłą do k, przy czym cyrkla wolno użyć tylko raz.

Rozw.



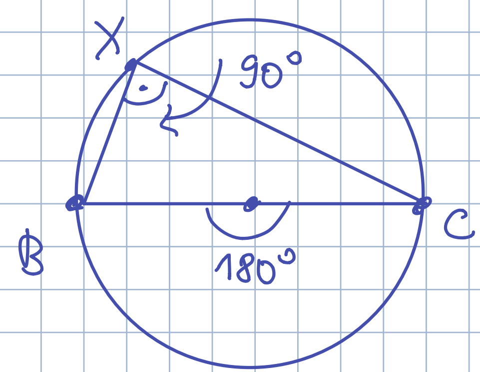
Zaczynamy od okręgu o środku na prostej $k \to$ punkty B i C. Dalej już tylko linijką punkty D, E, H.

BD i CE – wysokości $\triangle ABC$

$\Rightarrow AH \perp BC$.

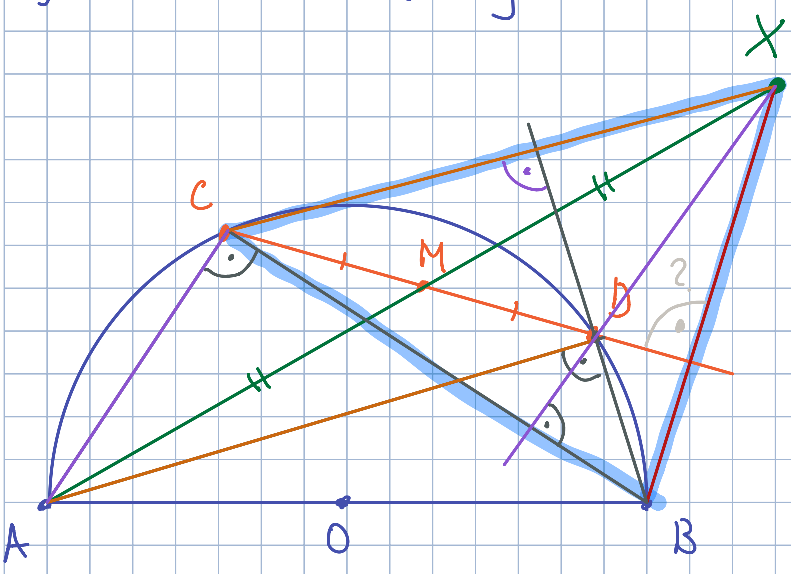
Uwaga!

Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.



Zad. 5

Punkty C i D leżą na półokręgu o średnicy AB. Punkt M jest środkiem cięciwy CD oraz odcinka AX. Wykazać, że $CD \perp BX$.



Rozwiązanie:

$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90°$.

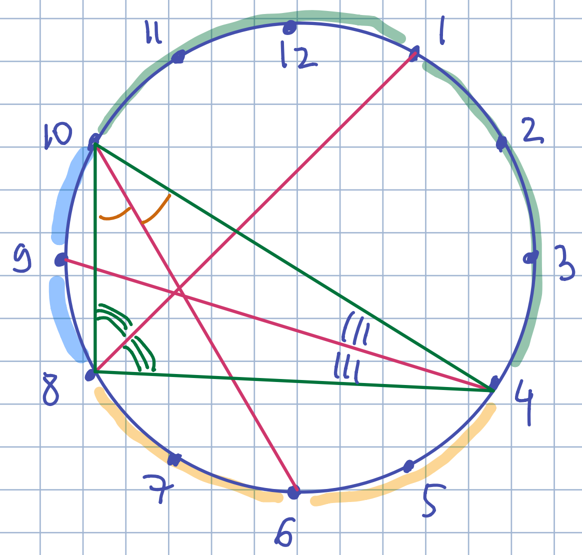
$CX \parallel AD \Rightarrow BD \perp CX$

$DX \parallel AC \Rightarrow DX \perp BC$

Teza wynika z wysokości w $\triangle BCX$.

Zad. 6

Wykazać, że w 12-kącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_8, A_4A_9, A_6A_{10} przecinają się w jednym punkcie.



Rozw.

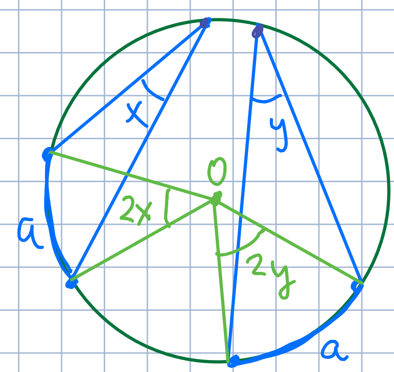
Rozpatrywane przekątne $\equiv$ dwusieczne kątów wewnętrznych $\Delta A_4A_8A_{10}$.

Zad. dodatkowe:

Wykazać, że rozpatrywane przekątne $\equiv$ wysokości w $\Delta A_1A_6A_9$.

Uwaga:

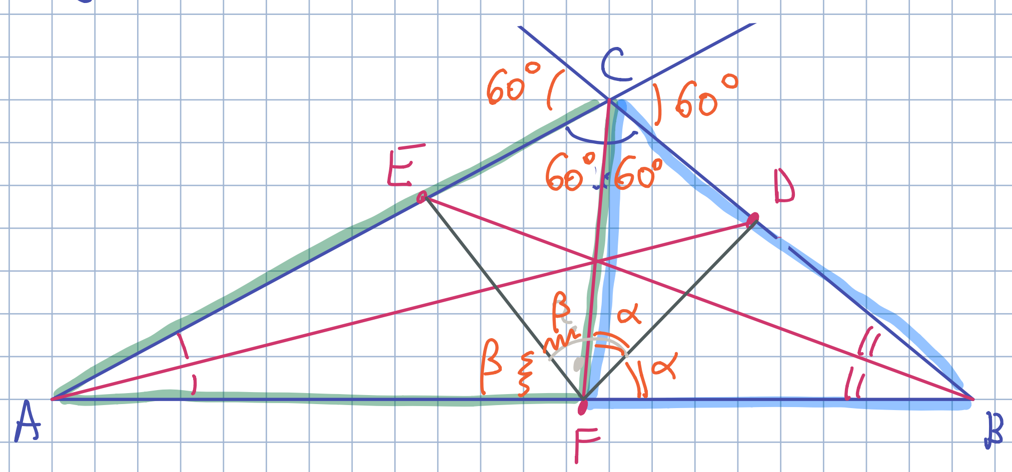
Kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe



$x=y$, bo $2x=2y$.

Zad. 7.

Dany jest ΔABC, w którym $\measuredangle C=120^\circ$. Dwusieczne kątów $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$ przecinają przeciwległe boki odp. w punktach D, E, F. Wykazać, że $\measuredangle DFE=90^\circ$



Rozw.

Z $\triangle AFC$: DF – dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzch. F

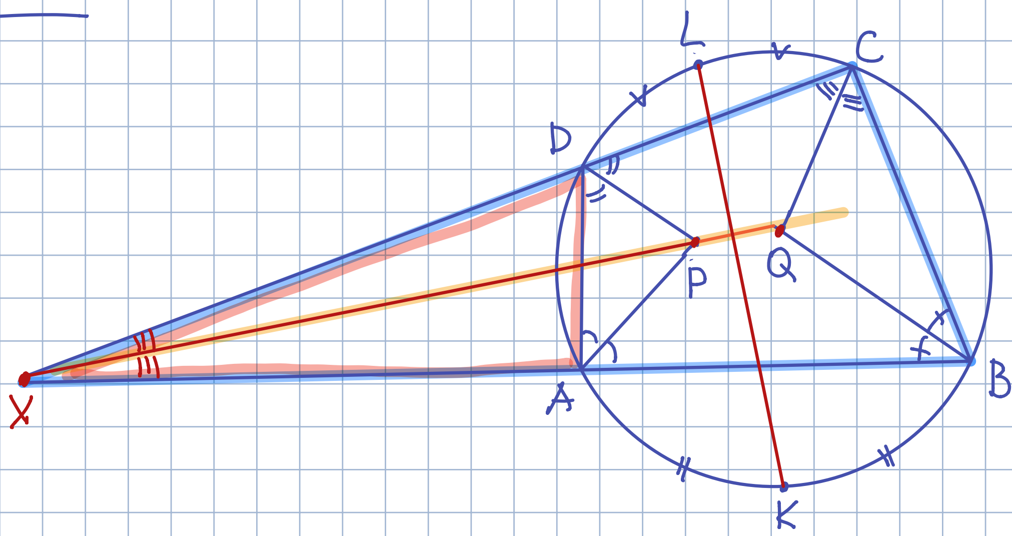
Z $\triangle BFC$: EF – — " — — " — F.

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$.

Zad. 8

Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Dwusieczne kątów $\sphericalangle D$ i $\sphericalangle A$ przecinają się w punkcie P, dwusieczne $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ – w Q. K, L – środki łuków AB i CD. Wykazać, że $KL \perp PQ$.

Rozwiązanie:



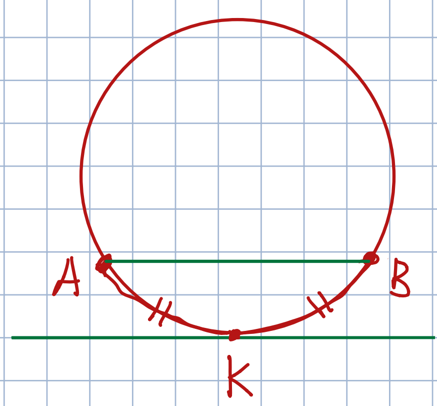
Niech $X = AB \cap CD$.

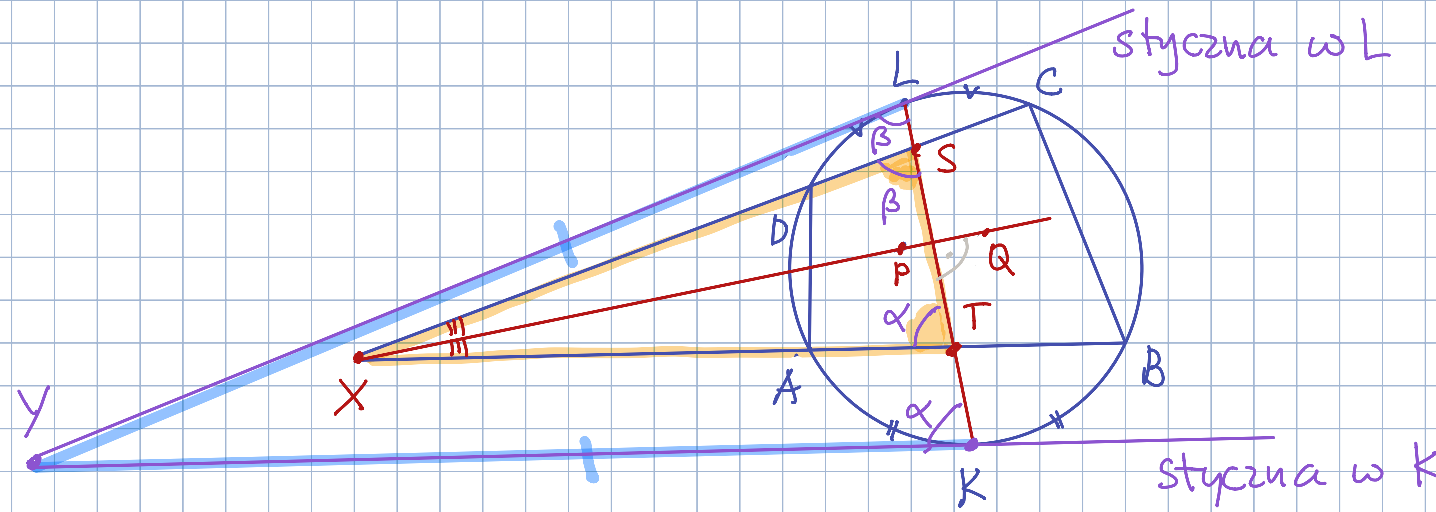
Z $\triangle XBC$: Q leży na dwusiecznej $\sphericalangle AXD$,

Z $\triangle XDA$: P — // — $\sphericalangle AXD$.

$\Rightarrow PQ \equiv$ dwusieczna kąta AXD

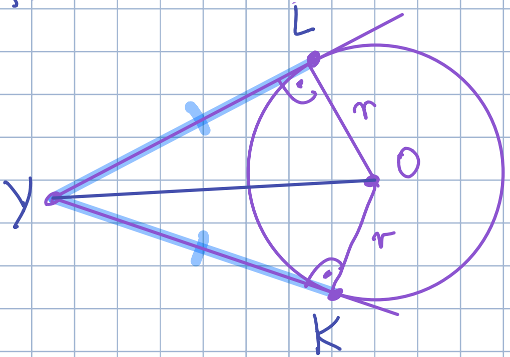
Styczna w K jest równoległa do AB, styczna w L jest równoległa do CD.





Ponieważ $KY = LY$, więc $\alpha = \beta$. Zatem dwusieczna kąta AXD $\equiv$ symetralna odcinka ST $\Rightarrow$ $KL \perp PQ$.

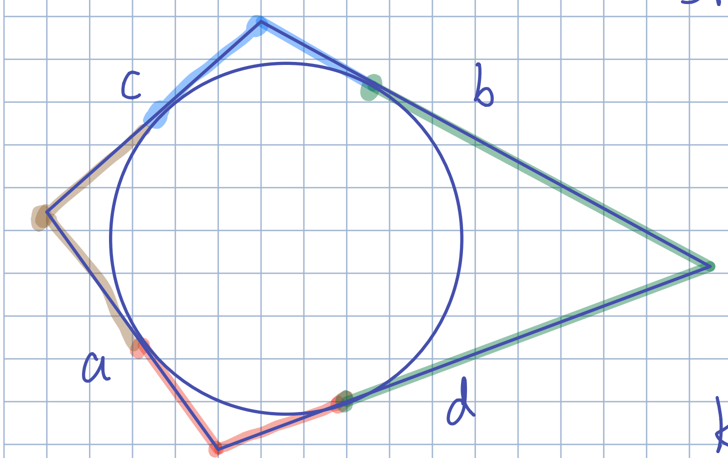
<u>Uwaga:</u>



$LY = KY$, bo $LY^2 = YO^2 - r^2 = KY^2$.

<u>Zad. 9</u>

Wykazać, że w czworokąt wypukły można wpisać okrąg $\iff a+b = c+d$



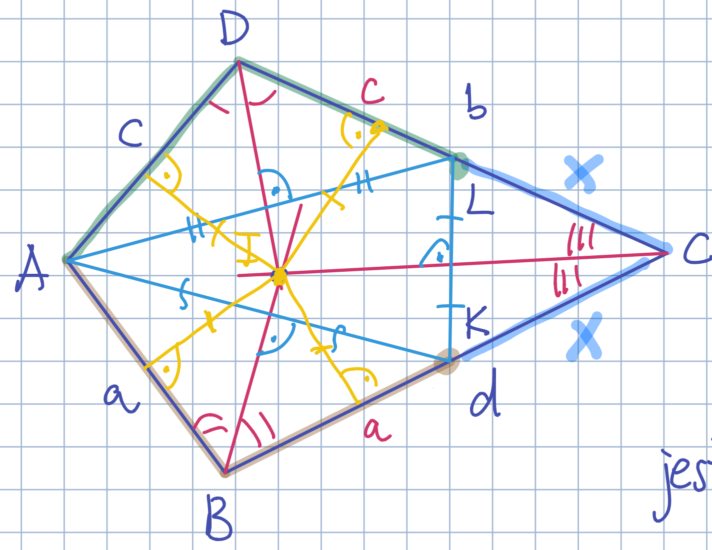
„$\Rightarrow$” jasne

„$\Leftarrow$” Wykażemy najpierw, że dwusieczne pewnych trzech kątów wewn. czworokąta przecinają się w jednym punkcie.

$a+b = c+d \iff d-a = b-c = x$.

K, L na BC i CD tak, że $AD = DL = c$, $AB = BK = a$.

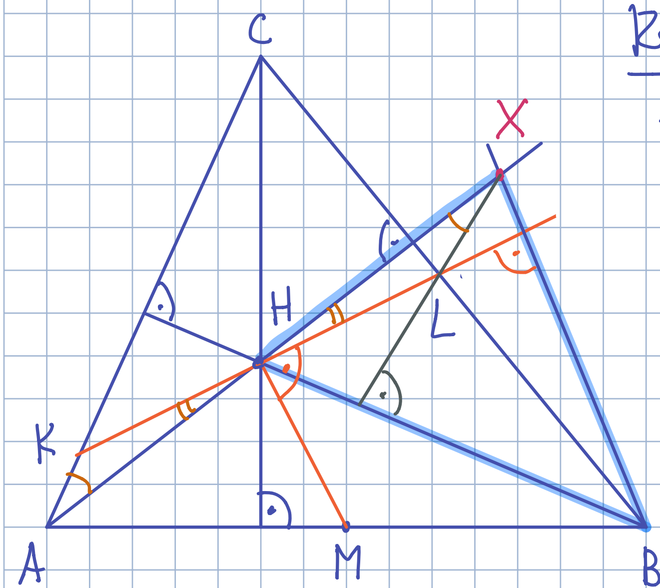
Wtedy $CK = CL = x \Rightarrow$ dwusieczne kątów $\sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$ $\equiv$ symetralne boków $\triangle AKL$.



Niech I – punkt wspólny tych dwusiecznych. Odległości punktu I od prostych AB, BC, CD, DA są równe, np. r.
$\Rightarrow$ okrąg o środku I i prom. r jest wpisany w czworokąt ABCD.

Zad. 10

Punkt H jest punktem przecięcia wysokości ΔABC. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta przechodząca przez H i $\perp$ do HM przecina boki CA i BC odp. w punktach K i L.
Wykazać, że $KH = LH$.



Rozw.

Przez B prowadzimy prostą równoległą do HM, która przecina AH w X.

$HM \equiv$ linia środkowa w ΔABX

$\Rightarrow AH = HX$.

$HL \perp BX$, $BL \perp HX$ $\Rightarrow$ L – punkt przecięcia wysokości w ΔHBX.

$\Rightarrow XL \perp BH \Rightarrow XL \parallel AK$

Wobec tego $\Delta AKH \equiv \Delta XLH$ (kbk) $\Rightarrow KH = LH$.