Na teście OMJ

1. Każdy bok pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Pokazać, że pewne trzy boki są tego samego koloru.

2. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Pokazać, że pewna przekątna ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

W różnych sytuacjach

3. Tablicę o wymiarach 3×3 podzielono na 9 prostokącików. W każdy z tych prostokącików wpisano jedną z liczb: -1, 0, 1. Uzasadnić, że wśród ośmiu sum otrzymanych przez sumowanie liczb stojących w wierszu, w kolumnie i na każdej z głównych przekątnych, co najmniej dwie sumy będą równe.

4. Przy okrągłym stole zasiadło 100 osób i wszystkie miejsca były zajęte (miejsca są rozstawione równomiernie). Wśród tych osób jest 51 mężczyzn. Udowodnić, że istnieją dwaj mężczyźni, którzy siedzą naprzeciwko siebie.

5. Na przyjęciu znalazło się n osób. Udowodnić, że co najmniej dwie z nich mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych.
   Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy osoba B zna osobę A.

6. *(Zadanie Ramseya)* Uzasadnić, że w gronie sześciu ludzi jest trzech takich, wśród których każdy zna każdego lub trzech takich, wśród których żadni dwaj się nie znają.
   Inne sformułowanie: Na płaszczyźnie obrano 6 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Każde dwa punkty połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnić, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w wybranych punktach, którego boki są tego samego koloru.

7. W każde pole szachownicy 10×10 wpisano dodatnią liczbę całkowitą nie większą niż 10. Polami sąsiadującymi nazwiemy pola, które mają wspólny bok lub wierzchołek. Liczby z sąsiadujących pól są względnie pierwsze. Udowodnić, że pewna liczba została napisana przynajmniej 17 razy.

W geometrii

8. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano jednym z dwóch kolorów. Dowieść, że istnieją wówczas dwa punkty tego samego koloru odległe od siebie o 1.

9. Udowodnić, że jeśli w trójkącie równobocznym o boku długości n umieścimy $n^2 + 1$ punktów, to odległość pewnych dwóch spośród nich nie przekracza 1.

10. W wierzchołkach siedmiokąta foremnego ustawiono pionki czerwone albo niebieskie – po jednym w każdym wierzchołku. Uzasadnić, że niezależnie od sposobu rozmieszczenia pionków istnieją trzy wierzchołki z pionkami tego samego koloru takie, które są jednocześnie wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

11. Danych jest 5 punktów kratowych (o obu współrzędnych całkowitych) na płaszczyźnie. Wykazać, że spośród nich da się wybrać takie dwa punkty, że środek odcinka o końcach w tych punktach jest punktem kratowym.

12. Prostokąt o wymiarach 3×7 podzielono na 21 kwadratów. Każdy z tych kwadratów pomalowano na biało lub szaro. Udowodnić, że istnieje prostokąt, którego boki zawierają się w liniach podziału, cztery narożne pola tego samego koloru.

13. W 21-kącie narysowano wszystkie przekątne. Udowodnić, że istnieją dwie przekątne, między którymi kąt ostry jest mniejszy niż $1°$.

W algebrze

14. Wykazać, że z $n+1$ dowolnych liczb naturalnych można zawsze wybrać takie dwie, których różnica jest podzielna przez n.

15. Uzasadnić, że wśród dowolnych 10 liczb naturalnych istnieją takie, których suma dzieli się przez 10.

16. *(Zadanie Paula Erdösa)* Wykazać, że wśród dowolnych $n + 1$ liczb naturalnych nie większych niż $2n$ istnieją dwie takie, że jedna z nich jest dzielnikiem drugiej.

17. Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

18. Wykazać, że istnieje taka potęga liczby 3, która w zapisie dziesiętnym ma trzy ostatnie cyfry tworzące układ 001.

19. *(XL OM, II stopień)* Dane są liczby całkowite a_1, $a_2, \ldots, a_{11}$. Wykazać, że istnieją takie liczby x_1, $x_2, \ldots, x_{11}$, nie wszystkie równe 0, z których każda jest równa -1, 0 lub 1 oraz liczba
$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots x_{11}a_{11}$$
jest podzielna przez 1989.

20. (*Zadanie Erdösa-Szekeresa)* Spośród $n^2 + 1$ różnych liczb można wybrać podciąg rosnący lub malejący długości $n + 1$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

21. Na zajęcia koła matematycznego przyszło 99 uczniów. Uzasadnić, że wśród nich jest co najmniej piętnastu takich, którzy się urodzili w tym samym dniu tygodnia.

22. *(Uogólnienie zadania Ramseya)* Siedemnaście osób wymienia pomiędzy sobą listy, przy czym każda osoba koresponduje z każdą z pozostałych. Przedmiotem korespondencji są trzy różne zagadnienia, a każda para osób omawia korespondencyjnie tylko jedno z tych zagadnień. Udowodnić, że są takie trzy osoby, których wzajemna korespondencja dotyczy jednego i tego samego zagadnienia.

23. *(Uogólnienie uogólnienia)* W turnieju szachowym uczestniczy 66 zawodników, każdy z każdym rozgrywa jedną partię, rozgrywki odbywają się w czterech miastach. Udowodnić, że pewna trójka zawodników rozgrywa wszystkie partie między sobą w tym samym mieście.

24. *(Inne uogólnienie)* Udowodnić, że wśród 10 osób są trzy, które się znają, albo są cztery takie, że żadne dwie z nich się nie znają.

25. W wierzchołkach 100–kąta foremnego ustawiono 100 pionków, przy czym w każdym wierzchołku ustawiono tylko jeden pionek. Wśród nich 76 pionków było niebieskich i 24 czerwone. Udowodnić, że istnieją cztery pionki niebieskie, które są wierzchołkami tego samego kwadratu.

26. W kwadracie o boku 1 danych jest 51 punktów. Udowodnić, że istnieje koło o promieniu $\frac{1}{7}$, w którym znajdują się co najmniej trzy spośród danych punktów.

27. Dany jest dziewięciokąt o wypukły o wierzchołkach w punktach kratowych. Wykazać, że wewnątrz pewnej przekątnej znajduje się punkt kratowy.

28. Udowodnić, że z dowolnych 7 liczb naturalnych można wybrać dwie tak, że ich suma lub różnica dzieli się przez 10.

29. Danych jest 101 dodatnich liczb całkowitych. Dowieść, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

30. *(XLIII OM, I stopień)* Wykazać, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją dwie takie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.