Magiczne Tabelki

Zdalne Seminarium OMJ — 22–23 września 2023 r.

Łamigłówki diagramowe i związane z nimi rozumowania dedukcyjne mogą okazać się dobrym i przystępnym wprowadzeniem do świata zadań olimpijskich. Podczas seminarium przyjrzyjmy się przykładom zarówno łamigłówek które mają w sobie coś z zadań olimpijskich, jak i zadań olimpijskich, które mają w sobie coś z łamigłówek.

Zadanie 1 (Kwadrat magiczny).

W pola tablicy 3×3 wpisano liczby od 1 do 9, każdą dokładnie raz. Okazało się, że sumy liczb w wierszach, w kolumnach i na obu przekątnych są wszystkie jednakowe.

a) Ile wynosi suma wszystkich liczb w tablicy?

b) Ile wynosi suma w pojedynczej linii (wierszu / kolumnie / przekątnej)?

c) Jaka liczba mogła zostać wpisana w centralne pole?

d) Jakie liczby mogły zostać wpisane w pola narożne?

e) Uzasadnij, że z dokładnością do obrotów i odbić symetrycznych jest tylko jeden kwadrat magiczny 3×3.

f) Z jakich innych (niż od 1 do 9) układów 9 kolejnych liczb całkowitych można ułożyć kwadrat magiczny?

g) Jaka będzie magiczna suma (w jednej linii) w kwadracie magicznym $n \times n$ (wypełnionym liczbami od 1 do n^2)?

Zadanie 2 (14/I/37 CIJML).

W pola tabeli 2×5 wpisano liczby od 1 do 10, każdą dokładnie raz, w taki sposób, że:

- suma liczb w górnym wierszu jest równa 23;
- suma liczb w każdym z czterech kwadratów 2×2 jest równa 23.

a) Jaka jest suma liczb w pierwszej kolumnie?

b) Jaka jest suma liczb w drugiej kolumnie?

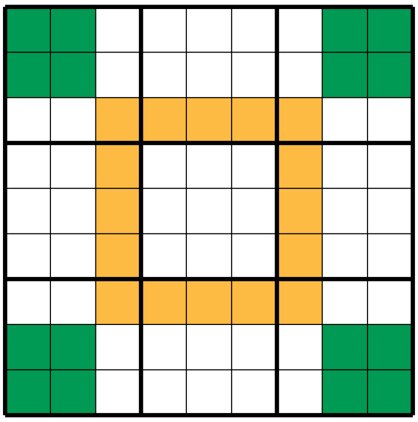
c) Jakie są sumy liczb w pozostałych kolumnach?

d) Jakie cztery liczby mogą znajdować się w kolumnach drugiej i czwartej?

e) Jaki układ liczb znajduje się w pierwszym wierszu?

Zadanie 3 (Pierścień Phistomefela).

Uzasadnij, że w każdym poprawnie wypełnionym diagramie sudoku na szesnastu polach zaznaczonych kolorem pomarańczowym znajduje się dokładnie ten sam zestaw cyfr, co na szesnastu polach zaznaczonych kolorem zielonym.



Zadanie 4 (Kwadrat 5×5).

Na podstawie poniższego obrazka uzasadnij, że istnieje (co najmniej jeden) kwadrat magiczny 5×5:

3	4	5	1	2
2	3	4	5	1
1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3

$+$

5	0	20	15	10
0	20	15	10	5
20	15	10	5	0
15	10	5	0	20
10	5	0	20	15

Zadanie 5 (5/II/XVIII OMJ).

W każde pole tabeli 4×4 wpisano jedną z liczb 1 lub 2. Dla każdego wiersza obliczono sumę wpisanych w niego liczb, a dla każdej kolumny obliczono iloczyn wpisanych w nią liczb — uzyskano w ten sposób osiem wyników.

a) Jakie są możliwe wyniki w wierszach?

b) Jakie są możliwe wyniki w kolumnach?

c) Ile liczb jest możliwymi wynikami?

d) Czy może się zdarzyć, że żadne dwa z uzyskanych ośmiu wyników nie są równe?

e) Jak to jest dla tabeli o 3 wierszach i 4 kolumnach?

Zadanie 6 (4/I/XVII OMJ).

W każde pole poniższej tabeli należy wpisać inną liczbę całkowitą spośród liczb od 1 do 17 w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich ośmiu kolumnach były równe, a suma liczb w górnym wierszu była dwa razy większa od sumy liczb w dolnym wierszu. Której z liczb od 1 do 17 można nie wpisać do tabeli? Podaj wszystkie takie liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7 (3/II/IX OMG).

W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8 (3/I/XII OMJ).

W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb -1, 0, 1 w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9 (5/III/XVII OMJ).

W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Zadanie 10 (1/III/LIX OM).

W pola tablicy rozmiaru $n \times n$ wpisane są liczby $1, 2, \ldots, n^2$, przy czym liczby $1, 2, \ldots, n$ znajdują się w pierwszym wierszu (od strony lewej do prawej), liczby $n+1, n+2, \ldots, 2n$ w drugim, itd.

Wybrano n pól tablicy, z których żadne dwa nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Niech a_i będzie liczbą znajdującą się w tym wybranym polu, które leży w wierszu o numerze i. Wykaż, że

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n} \geqslant \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$