XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2020 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje liczba pierwsza, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę

T a) 2;

T b) 3;

N c) 4.

Komentarz

a), b) Liczby 2 i 3 są pierwsze i dają odpowiednio reszty 2 i 3 przy dzieleniu przez 6.

c) Dodatnia liczba całkowita, która z dzielenia przez 6 daje resztę 4, jest postaci

$$6n+4=2(3n+2),$$

gdzie n jest pewną liczbą całkowitą nieujemną. Czynniki 2 oraz $3n+2$ są większe od 1, skąd wniosek, że liczba $2(3n+2)$ jest złożona.

2. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $a+b>0$. Wynika z tego, że

N a) $a\cdot b>0$;

T b) $(a+1)\cdot(b+1)>a\cdot b$;

T c) $a^3+b^3>0$.

Komentarz

a) Jeśli $a=2$, $b=-1$, to $a+b=1>0$, lecz $a\cdot b=-2<0$.

b) Przekształcając równoważnie nierówność $(a+1)\cdot(b+1)>a\cdot b$, uzyskujemy

$$a\cdot b+a+b+1>a\cdot b,$$

czyli $(a+b)+1>0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, a więc również wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

c) Z warunku $a+b>0$ wynika, że $a>-b$. Wobec tego również $a^3>(-b)^3$, czyli $a^3+b^3>0$.

3. Bartek miał obliczyć wartość wyrażenia $a+b\cdot c$ dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c. Zapomniał on jednak o kolejności wykonywania działań i najpierw dodał liczby a i b, po czym uzyskaną sumę pomnożył przez c. Okazało się, że pomimo tego Bartek otrzymał prawidłowy wynik. Wynika z tego, że

N a) wszystkie liczby a, b, c były całkowite;

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

T b) co najmniej jedna z liczb a, b, c była całkowita;

N c) wszystkie liczby a, b, c były równe 1.

Komentarz

a), b), c) Z warunków zadania wynika, że $a+b\cdot c=(a+b)\cdot c$. Przekształcając równoważnie tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$a+b\cdot c=a\cdot c+b\cdot c;$$

$$a\cdot c-a=0;$$

$$a\cdot(c-1)=0.$$

Ponieważ liczba a jest różna od 0, więc ostatnia równość sprowadza się do $c=1$. Wobec tego liczby a, b, c spełniają podany warunek wtedy i tylko wtedy, gdy $c=1$.

4. Istnieje taki trójkąt ABC, w którym $AB=AC=1$ i którego pole

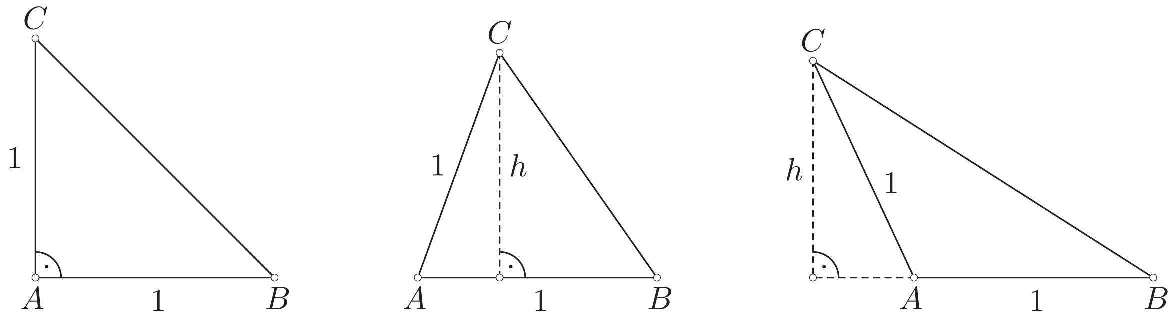
T a) jest mniejsze od $\frac{1}{2}$;

T b) jest równe $\frac{1}{2}$;

N c) jest większe od $\frac{1}{2}$.

Komentarz

b) Trójkąt, w którym $AB=AC=1$ oraz $\sphericalangle BAC=90^\circ$ ma pole równe $\frac{1}{2}$ (rys. 1).



rys. 1 rys. 2 rys. 3

a) Uzasadnimy, że każdy trójkąt, w którym $AB=AC=1$ oraz $\sphericalangle BAC\neq 90^\circ$ ma pole mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Oznaczmy przez h wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C (rys. 2, 3). Wówczas $h<AC$, czyli $h<1$. Pole trójkąta ABC jest wtedy równe

$$\frac{1}{2}AB\cdot h,$$

co z kolei jest mniejsze od $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$.

c) Z podpunktów a) i b) wynika, że każdy trójkąt, w którym $AB=AC=1$ ma pole albo równe $\frac{1}{2}$ (gdy $\sphericalangle BAC=90^\circ$) albo mniejsze od $\frac{1}{2}$ (gdy $\sphericalangle BAC\neq 90^\circ$).

5. W okrąg jest wpisany kwadrat, a w ten kwadrat jest wpisany mniejszy okrąg. Wynika z tego, że pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami

$\boxed{\text{T}}$ a) jest równe polu koła wpisanego w dany kwadrat;

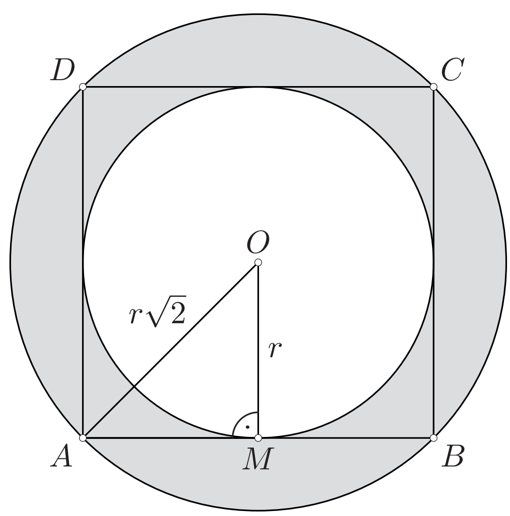
$\boxed{\text{T}}$ b) jest mniejsze od pola kwadratu;

$\boxed{\text{T}}$ c) jest większe od 75% pola kwadratu.

Komentarz

Niech $ABCD$ będzie danym kwadratem. Oznaczmy ponadto przez O wspólny środek obu okręgów i kwadratu, a przez M — środek boku AB. Niech ponadto r będzie promieniem mniejszego okręgu. Wówczas bok kwadratu $ABCD$ ma długość $2r$, a jego przekątna $2r\sqrt{2}$. Wobec tego promień większego okręgu równa się $r\sqrt{2}$. Pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami jest więc równe

$$\pi(r\sqrt{2})^2 - \pi r^2 = 2\pi r^2 - \pi r^2 = \pi r^2\,.$$



rys. 4

a) Pole mniejszego koła jest równe πr^2, czyli tyle samo, co pole pierścienia.

b) Ponieważ $\pi r^2 < 4r^2$, więc pole pierścienia jest mniejsze od pola kwadratu.

c) Z kolei $\pi r^2 > \frac{3}{4} \cdot 4r^2$, więc pole pierścienia jest większe od 75% pola kwadratu.

6. Bartek rzucił 100 razy sześcienną kostką do gry, a następnie pomnożył wszystkie uzyskane liczby oczek. Wynika z tego, że iloczyn, który otrzymał Bartek

$\boxed{\text{N}}$ a) jest liczbą złożoną;

$\boxed{\text{T}}$ b) jest liczbą składającą się z co najwyżej 100 cyfr;

$\boxed{\text{N}}$ c) jest różny od $2^{150} \cdot 3^{50}$.

Komentarz

a) Bartek mógł wyrzucić 99 razy liczbę 1 oraz jeden raz liczbę 2. Wtedy iloczyn wszystkich wyrzuconych oczek równa się 2, a więc jest liczbą pierwszą.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

b) Bartek za każdym razem wyrzucił liczbę mniejszą od 10. Wobec tego iloczyn, który otrzymał, jest liczbą mniejszą od 10^{100}, a liczby mniejsze od 10^{100} składają się z co najwyżej 100 cyfr.

c) Bartek mógł wyrzucić 50 razy liczbę 4 oraz 50 razy liczbę 6. Wtedy uzyskany iloczyn jest równy $4^{50} \cdot 6^{50} = 2^{100} \cdot (2^{50} \cdot 3^{50}) = 2^{150} \cdot 3^{50}$.

7. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy

N a) dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych;

N b) dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych;

T c) co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Komentarz

a) Suma dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Istotnie, jeśli n oznacza liczbę całkowitą, to $n+(n+1)=2n+1$. W związku z tym żadnej liczby parzystej (np. 2) nie da się przedstawić w postaci sumy dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych.

b) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3. Istotnie, jeśli n oznacza liczbę całkowitą, to $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$. Zatem dowolnej liczby niepodzielnej przez 3 (np. 1) nie da się przedstawić w postaci sumy dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych.

c) Jeśli n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, to

$$n = -(n-1)-(n-2)-\ldots-1+0+1+2+\ldots+(n-1)+n\,.$$

Prawa strona powyższej równości jest sumą kolejnych liczb całkowitych od $-(n-1)$ do n. Ta suma składa się z co najmniej dwóch składników, gdyż $n \geqslant 1$.

8. Dodatnią liczbę całkowitą a zmniejszono o 70%, a następnie uzyskany wynik powiększono o 20%. Uzyskano w ten sposób liczbę całkowitą b. Wynika z tego, że

N a) liczba a jest podzielna przez 100;

T b) liczba b jest podzielna przez 9;

T c) liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Komentarz

Po zmniejszeniu dodatniej liczby a o 70% uzyskujemy $a-\frac{70}{100}\cdot a=\frac{3}{10}\cdot a$. Z kolei powiększając tę liczbę o 20%, dostajemy

$$b=\left(\frac{3}{10}\cdot a\right)+\frac{20}{100}\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot a\right)=\frac{12}{10}\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot a\right)=\frac{9}{25}\cdot a\,.$$

a) Przyjmując $a=25$, uzyskujemy $b=9$, czyli liczbę całkowitą. Jednak liczba 25 nie jest podzielna przez 100.

b) Uzyskaną wyżej równość możemy przepisać w postaci $9a=25b$. Ponieważ liczba 9 nie ma wspólnych dzielników pierwszych z liczbą 25, więc b jest podzielne przez 9.

c) Powyższą równość możemy przepisać także w postaci

$$ab=\left(5\cdot\frac{b}{3}\right)^2.$$

Z podpunku b) wiemy, że liczba b jest podzielna przez 9, jest więc ona także podzielna przez 3. W związku z tym liczba $5\cdot\frac{b}{3}$ jest całkowita, jako iloczyn dwóch liczb całkowitych.

9. Istnieją takie liczby całkowite $a>1$ oraz $b>1$, że

T a) $a^2=b^3$;

T b) $a^2=2\cdot b^3$;

N c) $a^2=2\cdot b^2$.

Komentarz

a) Liczby $a=2^3$, $b=2^2$ spełniają podaną równość.

b) Liczby $a=4$, $b=2$ spełniają podaną równość.

c) Przypuśćmy, że takie liczby istnieją. Daną zależność możemy przekształcić do postaci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=2.$$

Ułamek $\frac{a}{b}$ zapiszmy w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{a_1}{b_1}$. Wtedy $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2=2$, czyli $\frac{a_1^2}{b_1^2}=2$. Ponieważ ułamek $\frac{a_1}{b_1}$ jest nieskracalny, więc także ułamek $\frac{a_1^2}{b_1^2}$ jest nieskracalny. Skoro więc jego wartość jest równa 2, to $b_1=1$. Wobec tego $a_1^2=2$. Jednak nie istnieje liczba całkowita, której kwadrat jest równy 2. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Uwaga.

W podpunkcie c) wykazaliśmy, że nie istnieje taka liczba *wymierna* $\frac{a}{b}$, której kwadrat jest równy 2. Wynika stąd, że liczby $\sqrt{2}$ nie można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Dowiedliśmy zatem, że liczba $\sqrt{2}$ jest *niewymierna*.

10. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie przekątne są równej długości. Wynika z tego, że

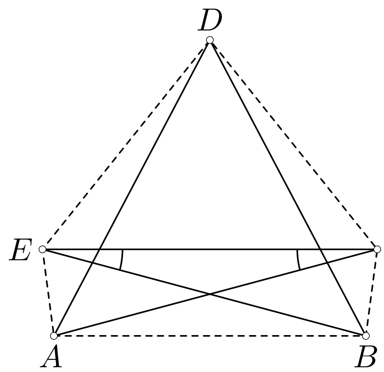
N a) wszystkie boki tego pięciokąta są równej długości;

N b) wszystkie kąty wewnętrzne tego pięciokąta są równej miary;

N c) jest to pięciokąt foremny.

Komentarz

a), b), c) Pięciokąt $ABCDE$ przedstawiony na rysunku 5 nie spełnia żadnego z warunków a), b), c), lecz ma wszystkie przekątne równych długości. Można go skonstruować następująco:



rys. 5

Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, a α dowolnym kątem o mierze mniejszej od $36°$. Konstrukcję zaczynamy od dwóch trójkątów równoramiennych ACE i BEC, o ramionach równych a i kątach ACE, BEC równych α. Następnie konstruujemy trójkąt ABD, w którym $AD = BD = a$.

11. W pewnej grupie składającej się z co najmniej trzech osób każdy zna dokładnie jedną spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to B zna A). Wynika z tego, że

N a) istnieje osoba w tej grupie, którą wszyscy znają;

T b) liczba osób w grupie jest parzysta;

T c) można posadzić wszystkie osoby tej grupy przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział obok swojego znajomego.

Komentarz

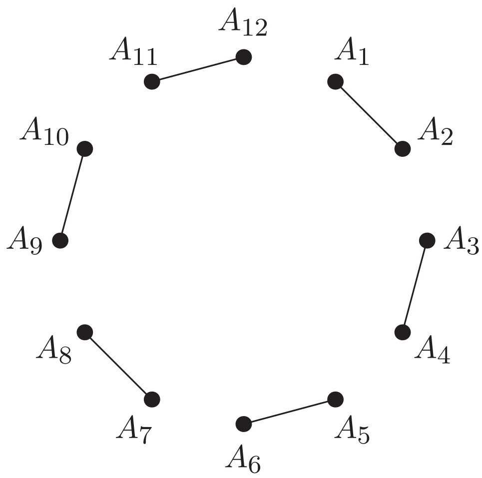
a) Gdyby taka osoba istniała, to znałaby ona wszystkich pozostałych, a więc co najmniej 2 inne osoby. Jest to sprzeczne z warunkami zadania.

b), c) Wybierzmy dowolną osobę A_1. Zna ona pewną inną osobę A_2. Wybieramy kolejną osobę A_3, różną od A_1 i A_2. Ona także zna pewną osobę A_4, którą nie jest ani A_1, ani A_2 — w przeciwnym razie osoba A_4 miałaby co najmniej dwóch znajomych. Dalej, wybieramy kolejną osobę A_5, różną od A_1, A_2, A_3, A_4. Ona również zna pewną osobę A_6, która jest różna od A_1, A_2, A_3, A_4. Postępowanie to kontynujemy. Po jego zakończeniu uzyskamy wszystkie osoby z tej grupy połączone w pary znajomych:

$$(A_1, A_2), (A_3, A_4), \ldots, (A_{2n-1}, A_{2n}).$$

Stąd wniosek, że w grupie jest parzysta liczba osób.

Wtedy także można je posadzić przy okrągłym stole w taki sposób, każdy siedział obok swojego znajomego (zob. rysunek 6 dla $n=6$).



rys. 6

12. Liczby a, b, c są naturalne oraz $a+b+c$ jest liczbą parzystą. Wynika z tego, że

T a) abc jest liczbą parzystą;

T b) $a-b+c$ jest liczbą parzystą;

N c) $ab+bc+ca$ jest liczbą parzystą.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że liczba abc jest nieparzysta. Wtedy wszystkie czynniki a, b, c są nieparzyste, wobec czego także suma $a+b+c$ jest liczbą nieparzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że liczba abc jest parzysta.

b) Zauważmy, że $a-b+c=(a+b+c)-2b$. Obie liczby $a+b+c$ i $2b$ są parzyste, a więc liczba $a-b+c$ jest także parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

c) Przyjmijmy $a=b=1$, $c=2$. Wówczas suma $a+b+c=4$ jest liczbą parzystą, lecz $ab+bc+ca=5$ jest liczbą nieparzystą.

13. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o promieniu 1, przy czym cięciwy AC i BD przecinają się i są prostopadłe. Wynika z tego, że

T a) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od 2;

T b) długość pewnego boku czworokąta $ABCD$ nie przekracza $\sqrt{2}$;

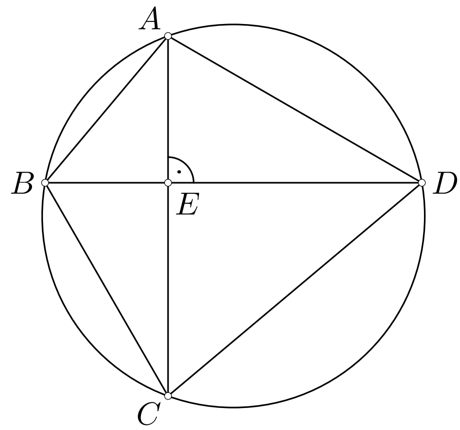
N c) czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Komentarz

a) Długości odcinków AC i BD nie przekraczają 2, ponieważ są one cięciwami okręgu o średnicy 2. Wobec tego

$$[ABCD]=\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2,$$

gdzie $[ABCD]$ oznacza pole czworokąta $ABCD$.



rys. 7

b) Oznaczmy przez E punkt przecięcia przekątnych AC i BD. Ponieważ długość odcinka AC nie przekracza 2, więc długość któregoś z odcinków AE, EC nie przekracza 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AE \leqslant 1$.

Podobnie, długość odcinka BD nie przekracza 2, więc długość któregoś z odcinków BE, ED nie przekracza 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $BE \leqslant 1$. Wtedy

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$

c) Jeśli AC i BD są dwiema prostopadłymi, przecinającymi się cięciwami, z których co najmniej jedna nie jest średnicą okręgu, to czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania i nie jest kwadratem.

14. Równolegle do boków kwadratu o boku długości 4 poprowadzono proste dzielące ten kwadrat na 16 małych kwadratów o boku długości 1. Następnie w niektórych z uzyskanych kwadratów 1×1 narysowano jedną przekątną w taki sposób, by żadne dwie narysowane przekątne nie miały wspólnych końców. Wynika z tego, że narysowano co najwyżej

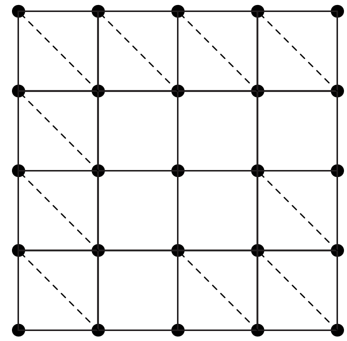
N a) 7 przekątnych;

N b) 9 przekątnych;

T c) 12 przekątnych.

Komentarz

a), b) Rysunek 8 przedstawia sposób narysowania 10 przekątnych w sposób opisany w treści zadania.



rys. 8

c) Gdyby było możliwe narysowanie 13 przekątnych zgodnie z warunkami zadania, to łączna liczba punktów zajętych przez końce narysowanych przekątnych byłaby równa $13 \cdot 2 = 26$. Tymczasem koniec każdej przekątnej leży w jednym z punktów, zaznaczonych na rysunku 8, których jest tylko 25. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie można narysować więcej niż 12 przekątnych spełniających warunki zadania.

15. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$, $KLMN$ oraz krawędziach bocznych AK, BL, CM, DN. Wynika z tego, że

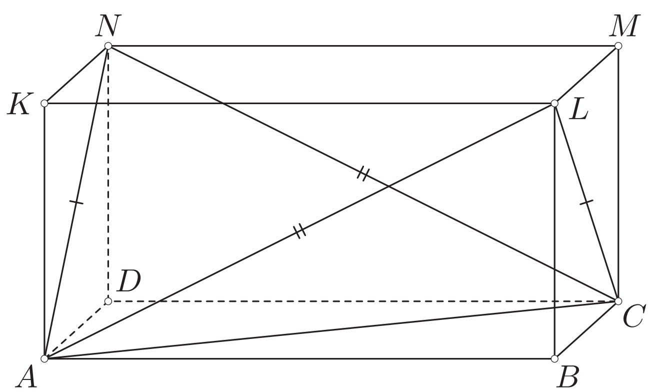
$\boxed{\text{T}}$ a) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$;

$\boxed{\text{T}}$ b) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$;

$\boxed{\text{N}}$ c) $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BKC$.

Komentarz

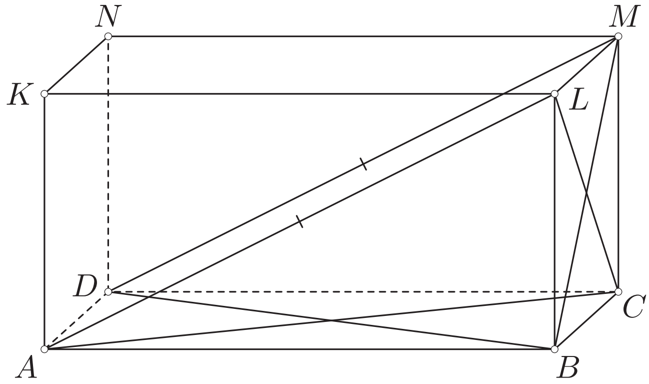
a) Zauważmy, że $CL = AN$ oraz $AL = CN$ (rys. 9). Wobec tego trójkąty ACL i CAN są przystające (cecha bok–bok–bok). Stąd $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$.



rys. 9

b) Zauważmy, że $AL = DM$, $AC = DB$ oraz $CL = BM$ (rys. 10). W związku z tym trójkąty ALC i DMB są przystające (cecha bok–bok–bok). Stąd $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

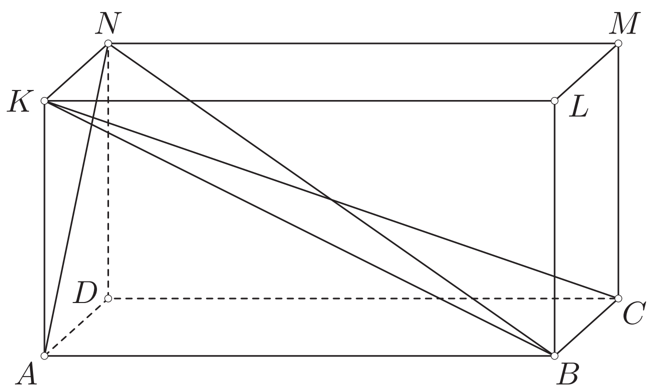


rys. 10

c) Rozpatrzmy prostopadłościan, w którym $AB=2$ oraz $BC=CM=1$ (rys. 11). Wykażemy, że wtedy $\sphericalangle ANB \neq \sphericalangle BKC$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BKC$. Ponieważ

$$\sphericalangle BAN = \sphericalangle KBC = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad BN = CK\,,$$

więc trójkąty ABN i BCK są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Jednak pierwszy z tych trójkątów ma boki długości 2, $\sqrt{6}$, $\sqrt{2}$, a drugi 1, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że $\sphericalangle ANB \neq \sphericalangle BKC$.



rys. 11