Imiona:

Nazwisko: Klasa:

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2020 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.
W przypadku pomyłki przekreśl znakiem X podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązanego zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n+1$ jest

T a) dodatnia;

T b) nieparzysta;

N ~~T~~ c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut. **Powodzenia!**

1. Istnieje liczba pierwsza, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę

a) 2;

b) 3;

c) 4.

2. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $a+b>0$. Wynika z tego, że

a) $a \cdot b > 0$;

b) $(a+1)\cdot(b+1) > a\cdot b$;

c) $a^3+b^3>0$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Imiona:

Nazwisko: Klasa:

3. Bartek miał obliczyć wartość wyrażenia $a+b\cdot c$ dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c. Zapomniał on jednak o kolejności wykonywania działań i najpierw dodał liczby a i b, po czym uzyskaną sumę pomnożył przez c. Okazało się, że pomimo tego Bartek otrzymał prawidłowy wynik. Wynika z tego, że

a) wszystkie liczby a, b, c były całkowite;

b) co najmniej jedna z liczb a, b, c była całkowita;

c) wszystkie liczby a, b, c były równe 1.

4. Istnieje taki trójkąt ABC, w którym $AB=AC=1$ i którego pole

a) jest mniejsze od $\frac{1}{2}$;

b) jest równe $\frac{1}{2}$;

c) jest większe od $\frac{1}{2}$.

5. W okrąg jest wpisany kwadrat, a w ten kwadrat jest wpisany mniejszy okrąg. Wynika z tego, że pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami

a) jest równe polu koła wpisanego w dany kwadrat;

b) jest mniejsze od pola kwadratu;

c) jest większe od 75% pola kwadratu.

6. Bartek rzucił 100 razy sześcienną kostką do gry, a następnie pomnożył wszystkie uzyskane liczby oczek. Wynika z tego, że iloczyn, który otrzymał Bartek

a) jest liczbą złożoną;

b) jest liczbą składającą się z co najwyżej 100 cyfr;

c) jest różny od $2^{150}\cdot 3^{50}$.

7. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy

a) dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych;

b) dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych;

c) co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Imiona:

Nazwisko: Klasa:

8. Dodatnią liczbę całkowitą a zmniejszono o 70%, a następnie uzyskany wynik powiększono o 20%. Uzyskano w ten sposób liczbę całkowitą b. Wynika z tego, że

a) liczba a jest podzielna przez 100;

b) liczba b jest podzielna przez 9;

c) liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Istnieją takie liczby całkowite $a>1$ oraz $b>1$, że

a) $a^2=b^3$;

b) $a^2=2\cdot b^3$;

c) $a^2=2\cdot b^2$.

10. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie przekątne są równej długości. Wynika z tego, że

a) wszystkie boki tego pięciokąta są równej długości;

b) wszystkie kąty wewnętrzne tego pięciokąta są równej miary;

c) jest to pięciokąt foremny.

11. W pewnej grupie składającej się z co najmniej trzech osób każdy zna dokładnie jedną spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to B zna A). Wynika z tego, że

a) istnieje osoba w tej grupie, którą wszyscy znają;

b) liczba osób w grupie jest parzysta;

c) można posadzić wszystkie osoby tej grupy przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział obok swojego znajomego.

12. Liczby a, b, c są naturalne oraz $a+b+c$ jest liczbą parzystą. Wynika z tego, że

a) abc jest liczbą parzystą;

b) $a-b+c$ jest liczbą parzystą;

c) $ab+bc+ca$ jest liczbą parzystą.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Imiona: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Nazwisko: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Klasa: | |

13. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o promieniu 1, przy czym cięciwy AC i BD przecinają się i są prostopadłe. Wynika z tego, że

☐ a) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od 2;

☐ b) długość pewnego boku czworokąta $ABCD$ nie przekracza $\sqrt{2}$;

☐ c) czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

14. Równolegle do boków kwadratu o boku długości 4 poprowadzono proste dzielące ten kwadrat na 16 małych kwadratów o boku długości 1. Następnie w niektórych z uzyskanych kwadratów 1×1 narysowano jedną przekątną w taki sposób, by żadne dwie narysowane przekątne nie miały wspólnych końców. Wynika z tego, że narysowano co najwyżej

☐ a) 7 przekątnych;

☐ b) 9 przekątnych;

☐ c) 12 przekątnych.

15. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$, $KLMN$ oraz krawędziach bocznych AK, BL, CM, DN. Wynika z tego, że

☐ a) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$;

☐ b) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$;

☐ c) $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BKC$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej