XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(29 września 2022 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Liczba 2022 jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Tę własność ma również liczba

T a) 2023;

T b) 2024;

T c) 2025.

Komentarz

a) Bezpośrednio sprawdzamy, że $2023 = 7 \cdot 289 = (2+0+2+3) \cdot 289$.

b) Zauważmy, że 2024 to liczba zakończona cyframi „024", wobec czego na mocy cechy podzielności przez 8 jest liczbą podzielną przez $8 = 2+0+2+4$.

c) Suma cyfr liczby 2025 jest równa 9, więc na mocy cechy podzielności przez 9 liczba 2025 jest podzielna przez $9 = 2+0+2+5$.

Uwaga

Liczby 2022, 2023, 2024, 2025 to cztery kolejne liczby naturalne, z których każda jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Poprzednia taka czwórka to liczby od 1014 do 1017, a następna — od 3030 do 3033. Okazuje się, że istnieje nawet 20 kolejnych liczb naturalnych o tej własności, ale 21 — już nie.

2. Liczba 100^{100} jest

N a) 100-cyfrowa;

N b) 200-cyfrowa;

N c) 300-cyfrowa.

Komentarz

Zauważmy, że

$$100^{100} = \left(10^2\right)^{100} = 10^{200} = 1\underbrace{00\ldots0}_{200\text{ zer}},$$

co oznacza, że liczba 100^{100} jest 201-cyfrowa.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

3. Jeśli każdy bok kwadratu wydłużymy o 10%, to

T	a) długość przekątnej tego kwadratu wzrośnie o 10%;
N	b) pole tego kwadratu wzrośnie o 20%;
N	c) obwód tego kwadratu wzrośnie o 40%.

Komentarz

Przypuśćmy, że początkowo bok kwadratu ma długość a. Jeśli każdy bok wydłużymy o 10%, to uzyskamy kwadrat o boku $1,1a$.

a) Długość przekątnej kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$, a długość przekątnej kwadratu o boku $1,1a$ jest równa $1,1\cdot a\sqrt{2}$. Jest to liczba o 10% większa od $a\sqrt{2}$.

b) Pole kwadratu o boku a jest równe a^2, a pole kwadratu o boku $1,1a$ jest równe $(1,1a)^2 = 1,21\cdot a^2$. Jest to liczba o 21% większa od a^2.

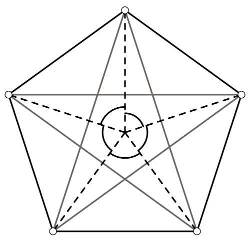
c) Obwód kwadratu o boku a jest równy $4a$, a obwód kwadratu o boku $1,1a$ jest równy $4,4a = 1,1\cdot 4a$. Jest to liczba o 10% większa od $4a$.

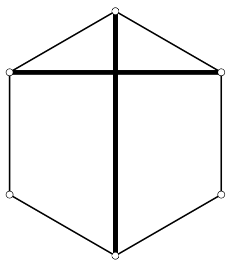
4. Co najmniej jedną parę prostopadłych przekątnych ma

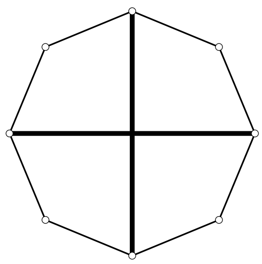
N	a) pięciokąt foremny;
T	b) sześciokąt foremny;
T	c) ośmiokąt foremny.

Komentarz

a) Dwa odcinki są prostopadłe dokładnie wtedy, gdy ich symetralne są prostopadłe. Tymczasem kąt między symetralnymi dwóch przekątnych pięciokąta foremnego jest całkowitą wielokrotnością kąta $\frac{1}{5}\cdot 360^\circ = 72^\circ$, czyli nie może być prosty (rys. 1).


rys. 1


rys. 2


rys. 3

b), c) Przykładowa para prostopadłych przekątnych sześciokąta foremnego jest przedstawiona na rysunku 2, a przykładowa para prostopadłych przekątnych ośmiokąta foremnego — na rysunku 3. W obu przypadkach przekątna pozioma jest symetryczna względem prostej zawierającej przekątną pionową.

Uwaga

Wielokąt foremny ma parę prostopadłych przekątnych dokładnie wtedy, gdy ma parzystą liczbę boków.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

5. Liczbę 18 można przedstawić w postaci sumy

T a) trzech kolejnych liczb całkowitych;

N b) sześciu kolejnych liczb całkowitych;

T c) dwunastu kolejnych liczb całkowitych.

Komentarz

a), c) Zauważmy, że $18=5+6+7=(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7$.

b) Przypuśćmy, że $18=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)$ dla pewnej liczby n. To oznacza, że $18=6n+15$, czyli $n=\frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ nie jest całkowita, więc żądane przedstawienie nie jest możliwe.

Uwaga

Wszystkie liczby $n\geqslant 2$ o tej własności, że liczbę 18 można przedstawić w postaci sumy n kolejnych liczb całkowitych to 3, 4, 9, 12 oraz 36.

6. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, przy czym zachodzi równość $\sphericalangle PAB+\sphericalangle PBC=60^\circ$. Wynika z tego, że

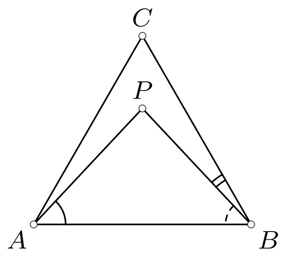
N a) $\sphericalangle PAB=30^\circ$;

N b) $\sphericalangle PBC=30^\circ$;

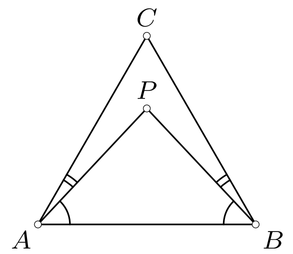
T c) $\sphericalangle PCA=30^\circ$.

Komentarz

Zauważmy, że $\sphericalangle PBA=60^\circ-\sphericalangle PBC$, wobec czego punkt P spełnia daną w treści zadania równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA$ (rys. 4).



rys. 4



rys. 5

c) Jeśli $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA$, to trójkąt ABP jest równoramienny i $AP=BP$. Z kolei trójkąt ABC jest równoboczny, więc $AC=BC$. Oznacza to, że trójkąty PAC oraz PBC są przystające (cecha bok–bok–bok) i w konsekwencji $\sphericalangle PCA=\sphericalangle PCB=\frac{1}{2}\cdot ACB=30^\circ$.

a), b) Jeśli punkt P zostanie wybrany w taki sposób, że $\sphericalangle PAB=\sphericalangle PBA\neq 30^\circ$ (rys. 5), to założenia zadania będą spełnione, ale $\sphericalangle PAB\neq 30^\circ$ oraz $\sphericalangle PBC=60^\circ-\sphericalangle PBA\neq 30^\circ$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

7. Istnieje taka liczba rzeczywista x, że żadne dwie spośród liczb x, x^2, x^3 nie są równe, a największą z nich jest

T a) x;

T b) x^2;

T c) x^3.

Komentarz

a) Jeżeli $x=\frac{1}{2}$, to $x^2=\frac{1}{4}$ i $x^3=\frac{1}{8}$, więc x jest największą spośród tych trzech liczb.

b) Jeżeli $x=-2$, to $x^2=4$ i $x^3=-8$, więc x^2 jest największą spośród tych trzech liczb.

c) Jeżeli $x=2$, to $x^2=4$ i $x^3=8$, więc x^3 jest największą spośród tych trzech liczb.

Uwaga

Liczby x, x^2, x^3 są parami różne dokładnie wtedy, gdy x jest liczbą różną od -1, 0, 1. Jeśli $x<0$, to x^2 jest największą z liczb x, x^2, x^3; jeśli $0<x<1$, to x jest największą z tych trzech liczb, a jeśli $x>1$, to x^3 jest największą z tych trzech liczb.

8. Kwadrat 5×5 można rozciąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary

N a) 1×2 lub 1×4;

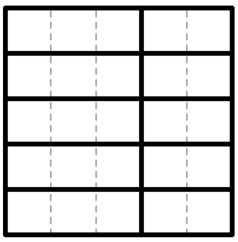
T b) 1×2 lub 1×3;

T c) 1×3 lub 1×4.

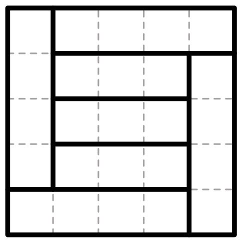
Komentarz

a) Kwadrat 5×5 ma pole 25, czyli wyrażające się liczbą nieparzystą. Tymczasem każdy z prostokątów 1×2 lub 1×4 ma pole wyrażające się liczbą parzystą. Suma liczb parzystych nie może być liczbą nieparzystą, co oznacza, że rozcięcie nie jest możliwe.

b), c) Przykładowe rozcięcia przedstawione są na rysunkach 6 i 7.



rys. 6



rys. 7

9. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym trójkąty ABP oraz CDP są równoboczne. Wynika z tego, że

N a) $AB=CD$;

T b) $AC=BD$;

N c) $AD=BC$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji i Nauki

Komentarz

Zauważmy, że

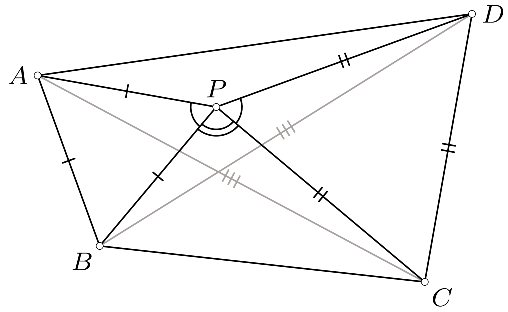
$$\sphericalangle BPC+\sphericalangle APD=360^\circ-\sphericalangle APB-\sphericalangle CPD=240^\circ,$$

więc co najmniej jeden z kątów BPC, APD ma miarę nie większą od 120°. Przypuśćmy, że $\sphericalangle BPC\leqslant 120^\circ$; rozumowanie w drugim przypadku jest analogiczne.

b) Ponieważ $AP=BP$, $CP=DP$ oraz

$$\sphericalangle APC=\sphericalangle BPC+\sphericalangle APB=\sphericalangle BPC+60^\circ=\sphericalangle BPC+\sphericalangle CPD=\sphericalangle BPD,$$

więc trójkąty APC oraz BPD są przystające (cecha bok–kąt–bok). To oznacza, że $AC=BD$.



rys. 8

a), c) Wybierając punkty A, B, C, D, P w taki sposób, że $AP=BP\neq CP=DP$, $\sphericalangle APB=\sphericalangle CPD=60^\circ$ oraz $60^\circ<\sphericalangle BPC<120^\circ$ (rys. 8), uzyskujemy konfigurację spełniającą warunki zadania, w której $AB\neq CD$. Ponadto $\sphericalangle APD=240^\circ-\sphericalangle BPC>120^\circ$, czyli w szczególności $\sphericalangle BPC\neq\sphericalangle APD$. Równość $AD=BC$ oznaczałaby, że trójkąty BPC oraz APD są przystające (cecha bok–bok–bok), skąd $\sphericalangle BPC=\sphericalangle APD$. To oznacza, że $AD\neq BC$.

10. Liczba naturalna m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki, a liczba naturalna n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników. Wynika z tego, że

N a) $m<n$;

N b) liczba $m\cdot n$ ma co najmniej 8 dodatnich dzielników;

T c) liczba $m\cdot n$ ma co najwyżej 15 dodatnich dzielników.

Komentarz

a) Przyjmijmy, że $m=25$ oraz $n=16$. Wówczas liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki: 1, 5, 25, liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16 oraz $m>n$.

b) Przyjmijmy, że $m=4$ oraz $n=16$. Wówczas liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki: 1, 2, 4, a liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16. Liczba $m\cdot n=64$ ma dokładnie 7 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

c) Każdy dodatni dzielnik liczby $m\cdot n$ można przedstawić w postaci $c\cdot d$, gdzie c jest dodatnim dzielnikiem liczby m, a d jest dodatnim dzielnikiem liczby n (być może na więcej niż jeden sposób). To oznacza, że liczba $m\cdot n$ ma co najwyżej $3\cdot 5=15$ dodatnich dzielników.

Uwaga

Można uzasadnić, że jeśli liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki, to jest postaci p^2 dla pewnej liczby pierwszej p, a jeśli liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników, to jest postaci q^4 dla pewnej liczby pierwszej q. Jeżeli $p=q$, to iloczyn $m\cdot n$ ma dokładnie 7 dodatnich dzielników. Jeżeli zaś $p\neq q$, to iloczyn $m\cdot n$ ma dokładnie 15 dodatnich dzielników.

11. Ułamek o liczniku równym 1 oraz mianowniku będącym dodatnią liczbą całkowitą nazywamy *prostym*. Liczbę $\frac{1}{7}$ można przedstawić jako

$\boxed{\text{T}}$ a) iloczyn dwóch ułamków prostych;

$\boxed{\text{T}}$ b) różnicę dwóch ułamków prostych;

$\boxed{\text{T}}$ c) sumę dwóch ułamków prostych.

Komentarz

Zauważmy, że $\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{14}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{56}$.

12. Dokładnie siedem spośród krawędzi pewnego sześcianu pomalowano na czerwono. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{T}}$ a) pewien wierzchołek sześcianu jest końcem mniej niż dwóch czerwonych krawędzi;

$\boxed{\text{N}}$ b) pewna ściana sześcianu ma dokładnie dwa czerwone boki;

$\boxed{\text{T}}$ c) pewne trzy czerwone krawędzie są równoległe.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że każdy wierzchołek jest końcem co najmniej dwóch czerwonych krawędzi. To oznacza, że czerwone krawędzie mają łącznie co najmniej $8\cdot 2=16$ końców, czyli tych krawędzi jest co najmniej 8 (gdyż każda krawędź ma dwa końce). Zatem jeśli czerwonych krawędzi jest mniej niż 8, to pewien wierzchołek sześcianu jest końcem co najwyżej jednej czerwonej krawędzi.

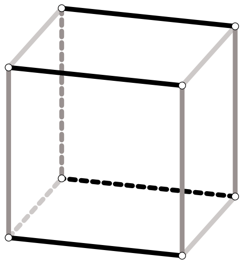
c) Zauważmy, że sześcian ma trzy czwórki równoległych krawędzi (rys. 9). Wobec tego jeśli siedem krawędzi sześcianu ma kolor czerwony, to co najmniej trzy czerwone krawędzie należą do tej samej czwórki — czyli są równoległe.

b) Jeżeli na czerwono zostały pomalowane krawędzie pogrubione na rysunku 10, to sześcian ma cztery ściany o dokładnie trzech czerwonych bokach oraz dwie ściany o dokładnie jednym czerwonym boku.

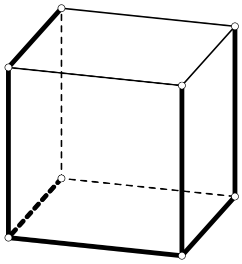
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

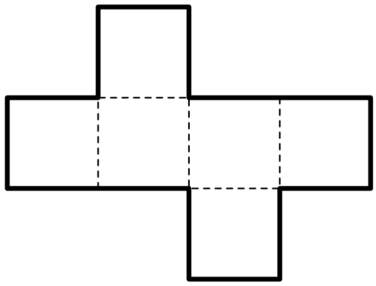
Ministerstwo Edukacji i Nauki



rys. 9



rys. 10



rys. 11

Uwaga

Przykład kolorowania z podpunktu b) można także przedstawić następująco: na czerwono kolorujemy wszystkie krawędzie, wzdłuż których sklejana jest siatka sześcianu z rysunku 11 (pogrubione), a niepokolorowane pozostają krawędzie, wzdłuż których ta siatka jest zaginana (przerywane).

13. Istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są, w pewnej kolejności, równe

N a) 101, 202, 303;

N b) 102, 201, 300;

T c) 201, 302, 403.

Komentarz

a) Zauważmy, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to suma dowolnych dwóch spośród liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest większa od trzeciej. Tymczasem $101+202=303$.

b) Zauważmy, że jeżeli liczby a, b, c są całkowite, to suma liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$, równa $2(a+b+c)$ jest liczbą parzystą. Tymczasem $102+201+300=603$ jest liczbą nieparzystą.

c) Jeżeli $a=50$, $b=151$, $c=252$, to $a+b=201$, $a+c=302$ oraz $b+c=403$.

Uwaga

Znając wartości sum $a+b$, $b+c$, $c+a$, liczby a, b, c można wyznaczyć korzystając z równości

$$a=\frac{(a+b)+(c+a)-(b+c)}{2}, \quad b=\frac{(b+c)+(a+b)-(c+a)}{2}, \quad c=\frac{(c+a)+(b+c)-(a+b)}{2}.$$

Można także uzasadnić, że trzy liczby są postaci $a+b$, $b+c$, $c+a$ dla dodatnich a, b, c dokładnie wtedy, gdy są długościami boków pewnego trójkąta.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

14. W turnieju badmintona wzięło udział 6 osób, każde dwie osoby rozegrały dokładnie jeden mecz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Wynika z tego, że istnieje osoba, która wygrała

T a) nieparzystą liczbę meczów;

T b) parzystą liczbę meczów;

N c) dokładnie 2 mecze lub dokładnie 3 mecze.

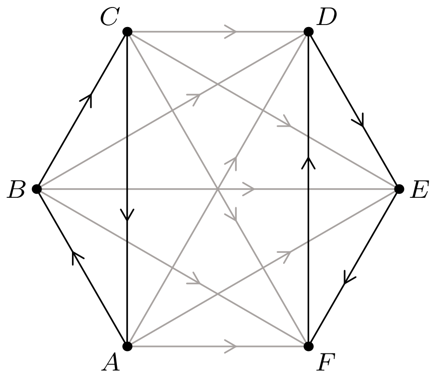
Komentarz

Wynikiem zawodnika nazwiemy liczbę meczów wygranych przez tego zawodnika. Ponieważ rozegrano dokładnie 15 meczów, więc suma wyników wszystkich sześciu zawodników jest równa 15.

a) Gdyby każdy zawodnik miał parzysty wynik, to suma wszystkich wyników również byłaby liczbą parzystą, czyli nie mogłaby być równa 15.

b) Gdyby każdy zawodnik miał nieparzysty wynik, to suma wszystkich wyników byłaby liczbą parzystą (jako suma sześciu liczb nieparzystych), czyli nie mogłaby być równa 15.

c) Nazwijmy zawodników turnieju A, B, C, D, E, F. Przypuśćmy, że A wygrał z B, B wygrał z C, C wygrał z A oraz D wygrał z E, E wygrał z F, F wygrał z D, a ponadto każdy z zawodników A, B, C wygrał z każdym z zawodników D, E, F (co zilustrowano na rysunku 12, przy czym każda strzałka prowadzi od zwycięzcy do przegranego). Przy takim układzie rozstrzygnięć meczów każdy z zawodników A, B, C wygrał dokładnie 4 mecze, a każdy z zawodników D, E, F wygrał dokładnie 1 mecz.



rys. 12

15. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P, przy czym $AP<CP$ oraz $BP<DP$. Wynika z tego, że

N a) $AB<CD$;

T b) obwód trójkąta ABP jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP;

N c) odległość punktu P od prostej AB jest mniejsza od odległości P od prostej CD.

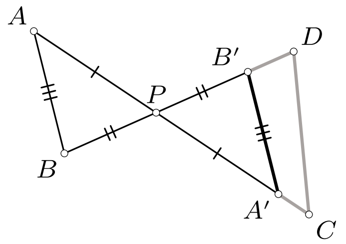
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Komentarz

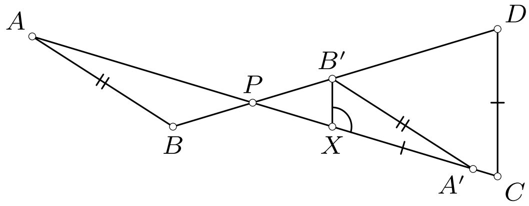
b) Niech A' będzie takim punktem odcinka CP, że $A'P = AP$, a B' będzie takim punktem odcinka DP, że $B'P = BP$. Innymi słowy — punkty A' oraz B' są obrazami odpowiednio punktów A oraz B w symetrii środkowej względem punktu P (rys. 13). Wówczas trójkąty ABP oraz $A'B'P$ są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd wynika, że $AB = A'B'$ oraz obwód trójkąta ABP jest równy obwodowi trójkąta $A'B'P$. Zauważmy, że $A'B' < A'C + CD + DB'$, wobec czego

$$A'P + A'B' + B'P < A'P + A'C + CD + DB' + B'P = AC + CD + DP,$$

czyli obwód trójkąta $A'B'P$ jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP.



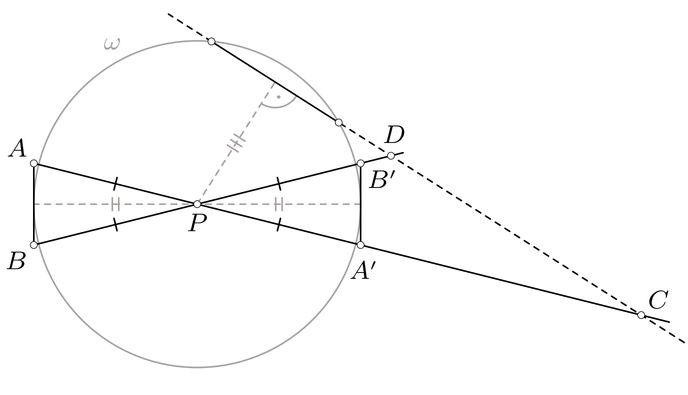
rys. 13



rys. 14

a) Rozważmy trójkąt CDP, w którym $CP = DP > CD$. Na boku CP tego trójkąta wybierzmy punkty A' oraz X w taki sposób, że $A'X = CD$ oraz A' leży na odcinku CX, a na boku DP — taki punkt B', że odcinek $B'X$ jest równoległy do CD (rys. 14). Wreszcie punkty A i B zdefiniujmy jako symetryczne odpowiednio do punktów A' i B' względem punktu P. Wówczas w trójkącie $A'B'X$ kąt przy wierzchołku X jest rozwarty, wobec czego bok $A'B'$ leżący naprzeciw tego kąta jest dłuższy od boku $A'X$. Stąd $AB = A'B' > A'X = CD$.

c) Rozważmy trójkąt ABP, w którym $AP = BP$ oraz $\sphericalangle APB < 60°$ i oznaczmy przez A', B' punkty symetryczne odpowiednio do A, B względem punktu P. Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie P, który jest styczny do odcinków AB oraz $A'B'$. Rozważmy dowolną cięciwę okręgu ω, której przedłużenie przecina półproste $PA'^{\rightarrow}$, $PB'^{\rightarrow}$ odpowiednio w takich punktach C, D, że $PC > PA'$, $PD > PB'$ (rys. 15). Wówczas odległość punktu P od prostej CD jest mniejsza od promienia okręgu ω, czyli odległości P od prostej AB.

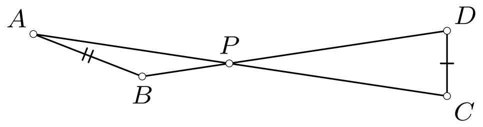


rys. 15

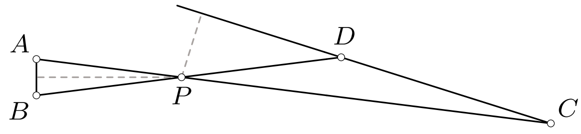
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

Uwaga

Aby przekonać się o poprawności odpowiedzi w podpunktach a) oraz c) nie trzeba wykonywać precyzyjnych konstrukcji, a wystarczy spojrzeć na odpowiednio tendencyjnie wybrane konfiguracje. Przypuśćmy, że kąt przy wierzchołku P ma niewielką miarę. Przy rozmieszczeniu punktów jak na rysunku 16 uzyskujemy $AB > CD$, a przy rozmieszczeniu jak na rysunku 17 — uzyskujemy, że punkt P jest bliżej prostej CD niż prostej AB.



rys. 16



rys. 17