VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(29 września 2011 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa

T a) 3^{100};

N b) 5^{100};

N c) 100 001.

Komentarz

Rozważmy graniastosłup, którego podstawę stanowi pewien n-kąt. Liczba krawędzi tego graniastosłupa jest równa $3n$. Wobec tego liczba krawędzi graniastosłupa jest podzielna przez 3.

a) Liczba 3^{100} jest podzielna przez 3. Jest to liczba krawędzi graniastosłupa, którego podstawą jest 3^{99}-kąt.

b), c) Liczba 5^{100} nie jest podzielna przez 3, gdyż w rozkładzie tej liczby na czynniki pierwsze nie występuje liczba 3. Również liczba 100 001 nie jest podzielna przez 3, gdyż suma cyfr tej liczby nie jest podzielna przez 3.

2. Istnieje 2011 takich różnych liczb pierwszych, że

T a) ich suma jest liczbą nieparzystą;

T b) ich suma jest liczbą parzystą;

T c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.

Komentarz

a) Rozważmy 2011 dowolnych różnych, nieparzystych liczb pierwszych. Ich suma jest liczbą nieparzystą.

b), c) Rozważmy 2011 różnych liczb pierwszych, z których jedna jest równa 2. Ich iloczyn jest podzielny przez 2, czyli jest liczbą parzystą.

Wśród rozważanych liczb jest 2010 liczb nieparzystych. Ich suma jest liczbą parzystą. Po dodaniu liczby 2, suma wszystkich liczb w dalszym ciągu jest liczbą parzystą.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta oraz $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Wynika z tego, że jest to trójkąt

T	a) równoramienny;
N	b) równoboczny;
N	c) ostrokątny.

Komentarz

a) Ponieważ $(a-b)(b-c)(c-a)=0$, więc $a-b=0$ lub $b-c=0$ lub $c-a=0$, zatem $a=b$ lub $b=c$ lub $c=a$. Wobec tego pewne dwa boki rozważanego trójkąta są równe, czyli jest on równoramienny.

b), c) Zauważmy, że boki dowolnego trójkąta rozwartokątnego równoramiennego spełniają podaną w treści zadania równość.

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

N	a) towar X był o 20% droższy od towaru Y;
T	b) towar X był o 25% droższy od towaru Y;
N	c) towar X był o 30% droższy od towaru Y.

Komentarz

Uzasadnimy, że towar X był o 25% droższy od towaru Y. Podamy dwa sposoby tego uzasadnienia.

Sposób I

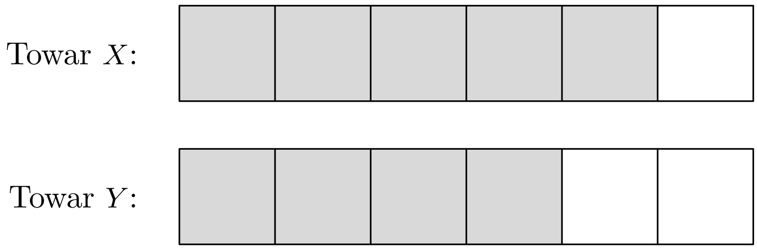
Oznaczmy przez x początkową cenę towaru X, a przez y początkową cenę towaru Y. Po podwyżce cena towaru X wynosi $x+\frac{20}{100}x=\frac{6}{5}x$. Z kolei cena towaru Y po podwyżce jest równa $y+\frac{50}{100}y=\frac{3}{2}y$. Wobec tego $\frac{6}{5}x=\frac{3}{2}y$, czyli $x=\frac{5}{4}y$, więc $x=\frac{125}{100}y=y+\frac{25}{100}y$.

Sposób II

Ponieważ aktualna cena towaru X jest równa $\frac{6}{5}$ ceny towaru przed podwyżką, więc pierwotna cena tego towaru wynosiła $\frac{5}{6}$ obecnej ceny. Podobnie uzasadniamy, że cena towaru Y wynosiła przed podwyżką $\frac{2}{3}$ aktualnej ceny.

Rozważmy dwa przystające prostokąty, symbolizujące obecne, równe ceny towarów X i Y (rys. 1). Oznaczmy na szaro części prostokątów, odpowiadające pierwotnym cenom towarów, czyli $\frac{5}{6}$ pierwszego i $\frac{2}{3}$ drugiego prostokąta. Zauważmy, że szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru X, jest o $\frac{1}{4}$ czyli 25% dłuższy niż szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru Y.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



rys. 1

5. Dodatnie liczby a, b spełniają warunek $a+b=1$. Wynika z tego, że

T a) $a^2+b^2<1$;

N b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}<1$;

T c) $ab<1$.

Komentarz

a) Zauważmy, że $(a+b)^2=1$, czyli $a^2+2ab+b^2=1$, zatem $a^2+b^2=1-2ab$. Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $2ab>0$. Stąd wynika, że $a^2+b^2<1$.

b) Przyjmując $a=\frac{1}{2}$ oraz $b=\frac{1}{2}$, otrzymujemy $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>1$.

c) Skoro $a+b=1$ oraz liczby a i b są dodatnie, to $a<1$ i $b<1$. Obie strony ostatnich nierówności są dodatnie, a zatem możemy je pomnożyć stronami. Otrzymujemy $ab<1$.

6. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że

N a) każda z liczb x i y jest podzielna przez 3;

N b) liczba x^2+y^2 jest podzielna przez 3;

T c) liczba x^2-y^2 jest podzielna przez 3.

Komentarz

a), b) Przyjmijmy $x=1$ oraz $y=2$. Wówczas liczba $x+y=3$ jest podzielna przez 3. Jednak wtedy żadna z liczb x, y oraz $x^2+y^2=5$ nie jest podzielna przez 3.

c) Zauważmy, że $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Pierwszy czynnik tego iloczynu jest liczbą podzielną przez 3. Stąd wynika, że liczba x^2-y^2 jest podzielna przez 3.

7. W trójkącie ABC wysokości AE i BF są równe. Wynika z tego, że

N a) wszystkie wysokości tego trójkąta są równe;

T b) kąty BAC i ABC są równe;

T c) środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Komentarz

b) Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE$, a także $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF$. Wobec tego

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF.$$

Ponieważ $AE = BF$, więc $BC = AC$. Zatem kąty BAC i ABC są równe.

c) Wykazaliśmy wyżej, że $BC = AC$. Wynika z tego, że trójkąt ABC ma oś symetrii, przechodzącą przez wierzchołek C. Stąd wniosek, że środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

a) Zauważmy, że trójkąt prostokątny równoramienny, o kącie prostym przy wierzchołku C, spełnia warunki zadania, lecz nie wszystkie wysokości tego trójkąta są równe.

8. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Wynika z tego, że

T a) liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej;

N b) liczba n jest iloczynem co najmniej dwóch różnych liczb pierwszych;

N c) liczba n^2 ma dokładnie sześć różnych dodatnich dzielników.

Komentarz

b) Przypuśćmy, że liczba n ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p i q. Wówczas jej dzielnikami są co najmniej cztery różne liczby dodatnie 1, p, q oraz pq, co przeczy założeniom.

a) Wykazaliśmy przed chwilą, że liczba n ma co najwyżej jeden dzielnik pierwszy, czyli jest równa p^k, dla pewnej liczby pierwszej p oraz pewnej nieujemnej liczby całkowitej k. Liczba takiej postaci ma dokładnie $k+1$ różnych dzielników dodatnich: $1, p, p^2, \ldots, p^k$. Ponieważ liczba n ma trzy różne dodatnie dzielniki, więc $k+1=3$, czyli $k=2$. Stąd wynika, że $n = p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p.

c) Skoro $n = p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p, to $n^2 = p^4$. Wobec tego liczba n^2 ma dokładnie pięć różnych dodatnich dzielników: 1, p, p^2, p^3 oraz p^4.

Uwaga

Jeśli $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{k_l}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze (liczby $p_1, p_2, \ldots, p_l$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $k_1, k_2, \ldots, k_l$ dodatnimi liczbami całkowitymi), to liczba dzielników liczby n jest równa $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_n+1)$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. Każdy z dwóch boków trójkąta ostrokątnego ma długość 2. Wynika z tego, że

T a) pole tego trójkąta jest mniejsze od 2;

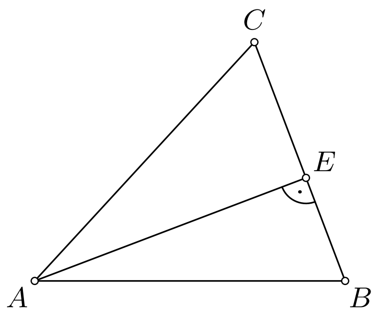
T b) każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2;

N c) trzeci bok tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.

Komentarz

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny ABC i jego wysokość AE (rys. 2). W trójkącie prostokątnym AEB przyprostokątna AE jest krótsza od przeciwprostokątnej AB. Podobnie wykazujemy, że odcinek AE jest krótszy od odcinka AC.

A zatem w trójkącie ostrokątnym ABC, wysokość poprowadzona z dowolnego wierzchołka jest krótsza od każdego z boków wychodzących z tego wierzchołka. Ponieważ w trójkącie, o którym mowa w zadaniu, dwa boki mają długość 2, więc każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.



rys. 2

a) Rozpatrzmy wysokość danego trójkąta, opuszczoną na bok długości 2. Wykazaliśmy wyżej, że ma ona długość mniejszą od 2. Wobec tego pole trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$.

c) Zauważmy, że trójkąt równoboczny o boku długości 2 spełnia warunki zadania.

10. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których

T a) różnica jest podzielna przez 4;

N b) suma jest podzielna przez 4;

N c) iloczyn jest podzielny przez 4.

Komentarz

a) Każda liczba całkowita daje z dzielenia przez 4 jedną z czterech reszt: 0, 1, 2 lub 3. Wobec tego wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją co najmniej dwie takie a i b, które dają taką samą resztę z dzielenia przez 4. Oznacza to, że $a=4k+r$ oraz $b=4l+r$, gdzie k i l są liczbami całkowitymi, a liczba r jest równa 0, 1, 2, 3 lub 4.

Wobec tego $k-l=4(k-l)$. Liczba $k-l$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a-b$ jest podzielna przez 4.

b) Rozpatrzmy pięć różnych liczb całkowitych, z których każda daje resztę 1 z dzielenia przez 4 (np. 1, 5, 9, 13, 17). Suma każdych dwóch z nich daje resztę 2 z dzielenia przez 4, a więc nie jest liczbą podzielną przez 4.

c) Rozpatrzmy pięć różnych nieparzystych liczb całkowitych (np. 1, 3, 5, 7, 9). Zauważmy, że iloczyn dowolnych dwóch z nich jest liczbą nieparzystą, czyli nie jest podzielny przez 4.

11. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

T a) $AB \cdot BC < 1$;

N b) $AB < 1$;

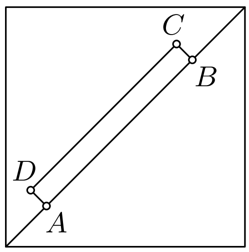
T c) $AC < \sqrt{2}$.

Komentarz

a) Ponieważ prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i nie jest całym kwadratem, więc jego pole jest mniejsze od pola tego kwadratu, czyli $AB \cdot BC < 1$.

c) Najdłuższym odcinkiem zawartym w kwadracie jest jego przekątna. Ponieważ dany w zadaniu kwadrat ma bok długości 1, więc jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$. Punkty A i C nie leżą na brzegu kwadratu, czyli odcinek AC jest krótszy od przekątnej kwadratu. Zatem $AC < \sqrt{2}$.

b) Przypuśćmy, że odcinek AB długości 1 leży na przekątnej kwadratu w taki sposób, że żaden z punktów A, B nie pokrywa się z wierzchołkiem kwadratu (rys. 3). Wówczas dowolny prostokąt o boku AB, zawarty wewnątrz danego kwadratu, spełnia warunki zadania.



rys. 3

12. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, że liczby a^2+b^2 oraz ab są wymierne. Wynika stąd, że wymierna jest liczba

T a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

T b) $(a+b)^2$;

N c) $a+b$.

Komentarz

a) Zauważmy, że

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}\,.$$

Wobec tego liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ jest wymiarna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych.

b) Liczby a^2+b^2 oraz $2ab$ są wymierne, a zatem ich suma $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ również jest liczbą wymierną.

c) Przyjmijmy $a=\sqrt{2}$ oraz $b=\sqrt{2}$. Wówczas liczby $a^2+b^2=2+2=4$ oraz $ab=2$ są wymierne, ale liczba $a+b=2\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

13. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle APB=80^\circ$. Wynika z tego, że

T a) każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40°;

N b) trójkąt ABP jest ostrokątny;

N c) punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Komentarz

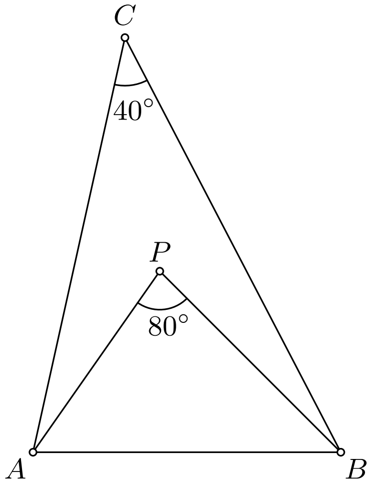
a) Suma kątów w czworokącie wklęsłym $APBC$ jest równa 360°, więc

$$(360^\circ-\sphericalangle APB)+\sphericalangle CAP+\sphericalangle CBP+\sphericalangle ACB=360^\circ\,,$$

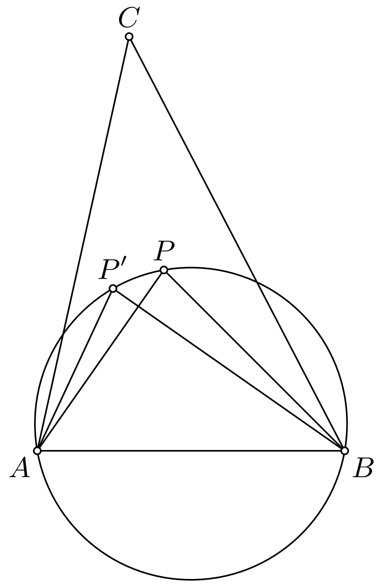
zatem $\sphericalangle CAP+\sphericalangle CBP=\sphericalangle APB-\sphericalangle ACB=80^\circ-40^\circ=40^\circ$. Stąd wynika, że każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40°.

c) Rozpatrzmy okrąg ω opisany na trójkącie ABP (rys. 5). Zauważmy, że dowolny punkt P', leżący na okręgu ω, wewnątrz trójkąta ABC, spełnia warunki zadania, gdyż $\sphericalangle AP'B=\sphericalangle APB=80^\circ$, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



rys. 4



rys. 5

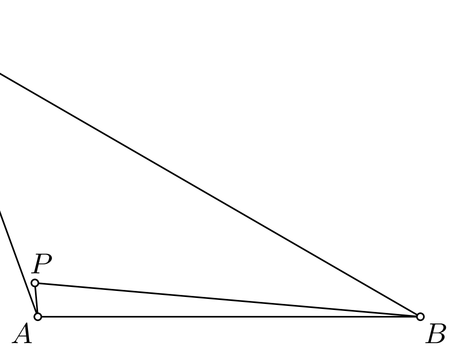
b) Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 110^\circ$ oraz $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ (rys. 6). Wówczas $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Wybierzmy punkt P leżący po tej samej stronie prostej AB, co punkt C, dla którego spełnione są równości:

$$\sphericalangle CAP = 15^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBP = 25^\circ\,.$$

Wówczas punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Podobnie jak w części a) wykazujemy, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 15^\circ + 25^\circ + 40^\circ = 80^\circ\,.$$

Ponadto $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAP = 110^\circ - 15^\circ = 95^\circ$. Trójkąt ABP jest więc rozwartokątny.



rys. 6

14. Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ jest

T	a) całkowita;
N	b) niewymierna;
N	c) dodatnia.

Komentarz

Zauważmy, że $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$. Liczba $\sqrt{2}-1$ jest dodatnia, więc $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. Stąd wynika, że

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1\,.$$

15. Dany jest ostrosłup o parzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równą długość. Wynika z tego, że liczba krawędzi danego ostrosłupa jest mniejsza od

N a) 9;

T b) 11;

T c) 13.

Komentarz

b), c) Przyjmijmy, że podstawą rozważanego ostrosłupa jest pewien n-kąt. Wtedy liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa $2n$, a liczba jego ścian bocznych jest równa n. Krawędzi jest zatem dwa razy więcej niż ścian bocznych.

Ponieważ wszystkie krawędzie danego ostrosłupa mają równą długość, więc jego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, których kąty przy wierzchołku ostrosłupa są równe $60°$. Suma kątów płaskich przy (górnym) wierzchołku ostrosłupa musi być mniejsza niż $360°$. Wobec tego liczba ścian bocznych wynosi co najwyżej 5. A zatem liczba krawędzi ostrosłupa jest równa co najwyżej 10.

a) Ostrosłup, którego podstawę stanowi pięciokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równobocznymi, spełnia warunki zadania.