XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2015 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Dane są takie dodatnie liczby a i b, że 30% liczby a jest równe 60% liczby b. Wynika z tego, że

T a) $a=2b$;

N b) $b=2a$;

T c) liczba a jest o 100% większa od liczby b.

Komentarz

Warunki zadania można zapisać następująco

$$30\%\cdot a=60\%\cdot b,$$
$$\frac{30}{100}a=\frac{60}{100}b,$$
$$a=2b.$$

W szczególności wynika z tego, że $a=b+b=b+100\%\cdot b$.

2. Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości 3 oraz 4. Wynika z tego, że trzeci bok tego trójkąta ma długość

N a) nie mniejszą od 5;

T b) nie większą od 5;

N c) równą 5.

Komentarz

Ponieważ przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest jednocześnie najdłuższym bokiem tego trójkąta, więc bok o długości 3 musi być jedną z przyprostokątnych. Stąd wniosek, że bok o długości 4 jest albo drugą przyprostokątną, albo przeciwprostokątną danego trójkąta.

W pierwszym przypadku, w myśl twierdzenia Pitagorasa, przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość

$$\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Z kolei w drugim przypadku długość drugiej przyprostokątnej jest równa

$$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Pozostaje zauważyć, że $\sqrt{7} < \sqrt{25} = 5$, skąd wynika, że w obu przypadkach trzeci bok rozważanego trójkąta ma długość nie większą od 5.

3. Liczba $9^{16} - 16^9$ jest podzielna przez

N a) 4;

T b) 5;

T c) $3^{16} - 4^9$.

Komentarz

a) Liczba 9^{16} jest nieparzysta, a liczba 16^9 jest parzysta. Wobec tego różnica $9^{16} - 16^9$ jest liczbą nieparzystą, więc nie jest podzielna przez 4.

b) Ostatnią cyfrą liczby $9^{16} = 81^8$ jest 1, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 1 są zakończone cyfrą 1. Podobnie, ostatnią cyfrą liczby 16^9 jest 6, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 6 są zakończone cyfrą 6. W związku z tym ostatnią cyfrą różnicy $9^{16} - 16^9$ jest 5, więc różnica ta jest podzielna przez 5.

c) Zauważmy, że dana liczba jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich, wobec czego możemy ją przedstawić następująco

$$9^{16} - 16^9 = (3^{16})^2 - (4^9)^2 = (3^{16} - 4^9)(3^{16} + 4^9).$$

W takim razie omawiana różnica jest liczbą podzielną przez $3^{16} - 4^9$.

4. Każde dwie spośród trzech dodatnich liczb całkowitych a, b, c są różne. Ponadto liczby te spełniają zależności $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c) = 1$. Wynika z tego, że

N a) $\mathrm{NWD}(b,c) = 1$;

N b) $\mathrm{NWD}(a, b+c) = 1$;

T c) $\mathrm{NWD}(a, bc) = 1$.

Komentarz

a), b) Jeżeli $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, to $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c) = 1$, a przy tym

$$\mathrm{NWD}(b,c) = \mathrm{NWD}(3,9) = 3 \neq 1 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWD}(a, b+c) = \mathrm{NWD}(2,12) = 2 \neq 1.$$

c) Przypuśćmy, że $\mathrm{NWD}(a, bc) > 1$. Oznacza to, że liczby a oraz bc mają wspólny dzielnik większy od 1. Wobec tego istnieje pewien wspólny dzielnik pierwszy p liczb a oraz bc. Skoro p dzieli iloczyn bc, to dzieli co najmniej jeden z czynników b, c. Jedna z par (a,b), (a,c) ma więc wspólny dzielnik większy od 1, czyli $\mathrm{NWD}(a,b) \neq 1$ lub $\mathrm{NWD}(a,c) \neq 1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\mathrm{NWD}(a, bc) = 1$.

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 50^\circ$. Wynika z tego, że

N a) $\sphericalangle AIB = 100^\circ$;

T b) $\sphericalangle AIB > 110^\circ$;

T c) $\sphericalangle AIB < 120^\circ$.

Komentarz

Punkt I, jako środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych BAC oraz ABC trójkąta ABC (rys. 1). Stąd wniosek, że

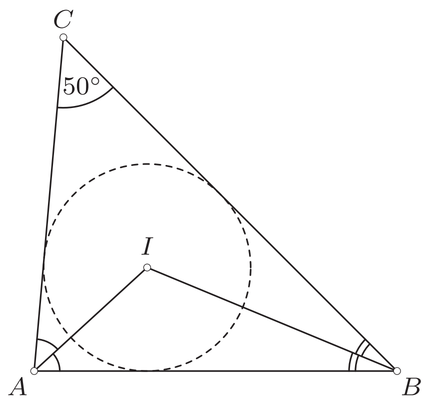
$$\sphericalangle BAI = \frac{\sphericalangle BAC}{2} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABI = \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°, skąd

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 130^\circ.$$

Łącząc uzyskane równości, otrzymujemy

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \sphericalangle BAI - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{2} = 115^\circ.$$



rys. 1

6. Trójkąt T rozcięto wzdłuż odcinka na dwa trójkąty T_1 i T_2, a trójkąt S — na trójkąty S_1 i S_2. Okazało się, że trójkąt T_1 jest przystający do trójkąta S_1, a trójkąt T_2 jest przystający do trójkąta S_2. Wynika z tego, że trójkąty T i S

T a) mają równe pola;

N b) mają równe obwody;

N c) są przystające.

Komentarz

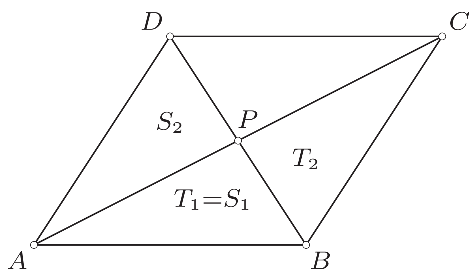
a) Pole trójkąta T jest równe sumie pól trójkątów T_1 i T_2, a pole trójkąta S jest równe sumie pól trójkątów S_1 i S_2. Figury przystające mają równe pola, więc pola trójkątów T_1

i S_1 są równe oraz pola trójkątów T_2 i S_2 są równe. Wobec tego również pola trójkątów T i S są równe.

b), c) Niech $ABCD$ będzie dowolnym równoległobokiem, w którym kąt ABC jest rozwarty. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD (rys. 2). Oznaczmy trójkąty ABC, ABP, BCP odpowiednio przez T, T_1, T_2, a trójkąty ABD, ABP, DAP odpowiednio przez S, S_1, S_2. Zauważmy, że wówczas trójkąty T_1 i S_1 są przystające (jest to ten sam trójkąt), a także trójkąty T_2 i S_2 są przystające (jeden jest obrazem drugiego w symetrii względem punktu P). Jednak

$$AB+BC+CA > AB+AD+DB\,,$$

co oznacza, że obwód trójkąta T jest większy od obwodu trójkąta S. Stąd wynika także, że trójkąty T i S nie są przystające.



rys. 2

7. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x(x+2) < y(y+2)$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{N}}$ a) $x < y$;

$\boxed{\text{T}}$ b) $x+y \neq -2$;

$\boxed{\text{T}}$ c) $|x+1| < |y+1|$.

Komentarz

b) Przypuśćmy, że $x+y=-2$. Wówczas $x+2=-y$ oraz $y+2=-x$ i wobec tego

$$x(x+2) = x\cdot(-y) = -xy \quad \text{oraz} \quad y(y+2) = y\cdot(-x) = -xy.$$

Stąd wynika, że liczby $x(x+2)$ i $y(y+2)$ są równe. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $x+y \neq 2$.

c) Daną w treści zadania nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$x(x+2) < y(y+2),$$
$$x^2+2x < y^2+2y,$$
$$x^2+2x+1 < y^2+2y+1,$$
$$(x+1)^2 < (y+1)^2,$$
$$|x+1| < |y+1|.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

a) Przyjmując $x=0$, $y=-3$, otrzymujemy $x(x+2)=0$ oraz $y(y+2)=3$. Dla tak dobranych liczb zachodzi więc dana nierówność $x(x+2)<y(y+2)$, ale $x>y$.

8. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{N}}$ a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

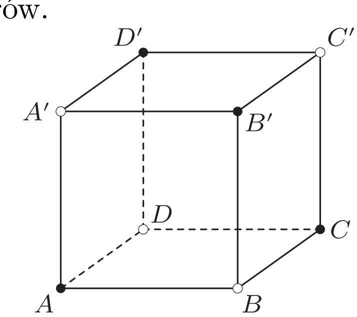
$\boxed{\text{T}}$ b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

$\boxed{\text{N}}$ c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

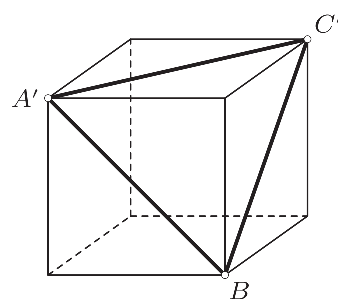
Komentarz

Oznaczmy dwie przeciwległe ściany sześcianu przez $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ w taki sposób, aby odcinki AA', BB', CC', DD' były krawędziami sześcianu.

a), c) Jeżeli pomalujemy wierzchołki A, B', C, D' na czarno, a wierzchołki A', B, C', D na biało (rys. 3), to każda krawędź i każda przekątna sześcianu będzie miała wierzchołki różnych kolorów.



rys. 3



rys. 4

b) Ponieważ wierzchołki pomalowano dwoma kolorami, więc pewne dwa wierzchołki trójkąta $A'BC'$ zostały pomalowane tym samym kolorem. To oznacza, że pewien bok tego trójkąta ma końce tego samego koloru (rys. 4).

9. Antek, biegnąc z prędkością x km/h, jeden kilometr pokonuje w ciągu x minut, gdzie x jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{N}}$ a) x jest liczbą wymierną;

$\boxed{\text{N}}$ b) Antek biegnie z prędkością większą niż 8 km/h;

$\boxed{\text{T}}$ c) gdyby Antek szedł z prędkością $\frac{1}{2}x$ km/h, to jeden kilometr pokonywałby w ciągu $2x$ minut.

Komentarz

Skoro Antek pokonuje jeden kilometr w ciągu x minut, to biegnie z prędkością $\dfrac{1}{x}$

kilometrów na minutę, czyli $\frac{60}{x}$ kilometrów na godzinę. Wobec tego

$$\frac{60}{x}=x\,,$$

skąd obliczamy $x=\sqrt{60}$.

a) Liczba $\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ jest niewymierna.

b) Zachodzi nierówność $\sqrt{60}<\sqrt{64}=8$, więc Antek biegnie z prędkością mniejszą od 8 km/h.

c) Gdyby Antek szedł dwa razy wolniej, przebycie tej samej trasy zajęłoby mu dwukrotnie więcej czasu.

10. Wielokąt A ma co najmniej osiem wierzchołków oraz dwa razy więcej boków niż wielokąt B. Wynika z tego, że wielokąt A ma

T a) dwa razy więcej wierzchołków niż wielokąt B;

N b) dwa razy więcej przekątnych niż wielokąt B;

N c) parzystą liczbę przekątnych.

Komentarz

a) Każdy wielokąt ma tyle samo boków co wierzchołków. Wobec tego, skoro wielokąt A ma dwa razy więcej boków niż wielokąt B, to ma on również dwa razy więcej wierzchołków.

b) Zauważmy, że liczba przekątnych każdego n-kąta jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$. Rzeczywiście, każdy z wierzchołków n-kąta jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$. W szczególności wynika stąd, że czworokąt ma dwie przekątne, a mający dwa razy więcej boków ośmiokąt ma 20, czyli 10 razy więcej, przekątnych.

c) Korzystając ze wzoru na liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym, wyprowadzonego w poprzednim podpunkcie, stwierdzamy, że każdy dziesięciokąt wypukły ma dokładnie $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-3)=35$, czyli nieparzystą liczbę, przekątnych.

11. Każdy punkt okręgu ω o promieniu 1 pomalowano na czarno lub biało w taki sposób, że każda cięciwa tego okręgu o długości 1 ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że

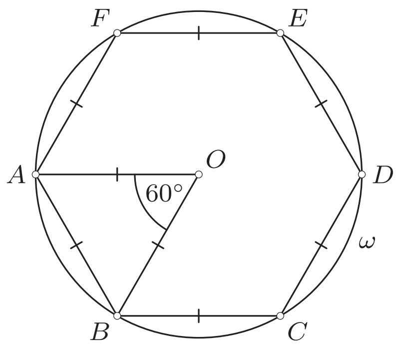
T a) każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów;

T b) każdy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg ω ma wszystkie trzy wierzchołki tego samego koloru;

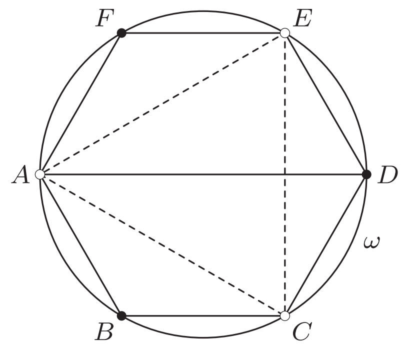
T c) każdy kwadrat wpisany w okrąg ω ma dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

Komentarz

Oznaczmy przez O środek okręgu ω. Niech A będzie dowolnym punktem okręgu ω oraz niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym wpisanym w ten okrąg (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle AOB = 60°$, gdyż jest to kąt środkowy oparty na łuku będącym $\frac{1}{6}$ okręgu. Stąd wniosek, że trójkąt ABO jest równoboczny, więc $AB = OA = 1$. To oznacza, że każdy z boków sześciokąta $ABCDEF$ jest cięciwą okręgu ω o długości 1.



rys. 5



rys. 6

a) Bez straty ogólności przypuśćmy, że punkt A został pomalowany na biało (rozumowanie w przypadku gdy punkt A jest czarny jest w pełni analogiczne). Wówczas z warunków zadania wynika kolejno, że punkty B i F zostały pomalowane na czarno, punkty C i E na biało i w końcu punkt D na czarno (rys. 6). Odcinek AD jest średnicą okręgu ω, która ma końce różnych kolorów, a punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wniosek, że każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów.

b) Trójkąt ACE o wierzchołkach tego samego koloru jest równoboczny i wpisany w okrąg ω. Punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wynika, że każdy trójkąt równoboczny wpisany w dany okrąg ma wierzchołki tego samego koloru.

c) Zauważmy, że przekątne kwadratu wpisanego w okrąg ω są średnicami tego okręgu. Z punktu a) wiemy, że każda taka średnica ma jeden wierzchołek czarny i jeden biały. Stąd wniosek, że wśród wierzchołków kwadratu zawsze będą dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

12. Liczba $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ jest

$\boxed{\text{N}}$ a) niewymierna;

$\boxed{\text{N}}$ b) mniejsza od 2;

$\boxed{\text{N}}$ c) równa $\sqrt[n]{2}$ dla pewnej liczby całkowitej $n>1$.

Komentarz

Zauważmy, że

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3\cdot 2^2\cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2\,.$$

13. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy 4^{100}. Wynika z tego, że

N a) liczba n jest parzysta;

N b) liczba n ma co najmniej 100 cyfr;

T c) suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od 400.

Komentarz

a) Liczba $n=\underbrace{444\ldots4}_{100 \text{ cyfr } 4}1$ jest nieparzysta, a jej iloczyn cyfr jest równy 4^{100}.

b) Liczba $n=\underbrace{888\ldots8}_{66 \text{ cyfr } 8}4$ ma 67 cyfr, a jej iloczyn cyfr jest równy

$$8^{66}\cdot 4=2^{3\cdot 66}\cdot 2^2=2^{198+2}=2^{200}=4^{100}.$$

c) Zauważmy, że jedynymi możliwymi cyframi liczby n są cyfry 1, 2, 4 i 8. Oznaczmy przez m_d liczbę wystąpień cyfry d w zapisie dziesiętnym liczby n. Z warunków zadania wynika wówczas, że

$$\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{m_1 \text{ cyfr } 1}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{m_2 \text{ cyfr } 2}\cdot\underbrace{4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4}_{m_4 \text{ cyfr } 4}\cdot\underbrace{8\cdot 8\cdot\ldots\cdot 8}_{m_8 \text{ cyfr } 8}=4^{100},$$

czyli równoważnie

$$1^{m_1}\cdot 2^{m_2}\cdot 4^{m_4}\cdot 8^{m_8}=4^{100},$$
$$2^{m_2}\cdot 2^{2m_4}\cdot 2^{3m_8}=2^{200},$$
$$2^{m_2+2m_4+3m_8}=2^{200},$$
$$m_2+2m_4+3m_8=200.$$

Suma cyfr liczby n jest równa

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m_1 \text{ cyfr } 1}+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{m_2 \text{ cyfr } 2}+\underbrace{4+4+\ldots+4}_{m_4 \text{ cyfr } 4}+\underbrace{8+8+\ldots+8}_{m_8 \text{ cyfr } 8}=m_1+2m_2+4m_4+8m_8.$$

Możemy teraz zauważyć, że

$$m_1+2m_2+4m_4+8m_8=m_1+2m_8+2\cdot(m_2+2m_4+3m_8)=m_1+2m_8+2\cdot 200\geqslant 400,$$

gdyż $m_1\geqslant 0$ oraz $m_8\geqslant 0$.

14. Każdy bok pewnego czworokąta ma długość mniejszą od 1. Wynika z tego, że

T a) pole tego czworokąta jest mniejsze od 1;

N b) istnieje kwadrat o boku 1, w którym ten czworokąt jest zawarty;

N c) długość każdej przekątnej tego czworokąta jest mniejsza od $\sqrt{2}$.

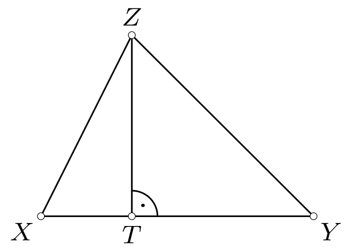
Komentarz

Udowodnimy najpierw następujący fakt: jeżeli co najmniej dwa z boków trójkąta mają długość mniejszą od 1, to pole tego trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Niech XYZ będzie trójkątem, w którym $XY<1$ oraz $XZ<1$ (rys. 7). Oznaczmy przez T rzut prostokątny punktu Z na prostą XY (punkt T może leżeć poza odcinkiem XY lub pokrywać się z jednym z punktów X, Y). W trójkącie prostokątnym XZT (być może zdegenerowanym do odcinka) przeciwprostokątna XZ jest nie krótsza od przyprostokątnej ZT, czyli $ZT\leqslant XZ$. Uzyskujemy więc nierówność

$$[XYZ]=\frac{XY\cdot ZT}{2}\leqslant\frac{XY\cdot XZ}{2}<\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. To kończy dowód.



rys. 7

a) Niech $ABCD$ będzie czworokątem, którego każdy bok ma długość mniejszą od 1. Korzystając z udowodnionego na początku faktu, otrzymujemy

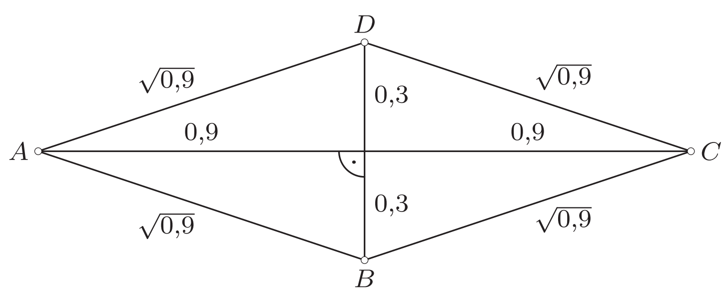
$$[ABC]<\frac{1}{2}\quad\text{oraz}\quad[ADC]<\frac{1}{2}.$$

Dodając stronami dwie powyższe nierówności, uzyskujemy $[ABCD]<1$.

c) Rozważmy prostopadłe odcinki AC, BD o długościach odpowiednio $1,8$, $0,6$, które dzielą się na połowy (rys. 8). Wówczas czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego każdy bok ma długość

$$\sqrt{0,9^2+0,3^2}=\sqrt{0,81+0,09}=\sqrt{0,9}<1.$$

Z kolei przekątna AC ma długość większą od $\sqrt{2}$, gdyż $(1,8)^2=3,24>2=(\sqrt{2})^2$.



rys. 8

b) Każdy odcinek zawarty w kwadracie o boku 1 ma długość co najwyżej $\sqrt{2}$. Stąd wniosek, że czworokąta $ABCD$ skonstruowanego w punkcie c) nie można umieścić wewnątrz takiego kwadratu.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

15. Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju trójkąt. Wynika z tego, że

N a) każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie dwie ściany trójkątne;

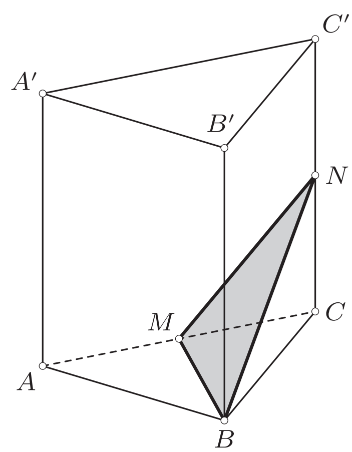
N b) w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie;

N c) każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem lub czworokątem.

Komentarz

Rozważmy graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC, $A'B'C'$ oznaczonych w taki sposób, że AA', BB', CC' są krawędziami bocznymi graniastosłupa. Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami krawędzi AC i CC'.

Przetnijmy graniastosłup płaszczyzną BMN, uzyskując w przekroju trójkąt (rys. 9). Wówczas jedna z otrzymanych brył ma trzy ściany trójkątne ABM, BMN, $A'B'C'$, w jej wierzchołku B schodzą się dokładnie cztery krawędzie oraz posiada ona ścianę pięciokątną $AMNC'A'$.



rys. 9