XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(27 września 2018 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. W sklepie „U Bronka” cena spodni była równa cenie sukienki. Cenę spodni najpierw podniesiono o 5%, a następnie nową cenę obniżono o 15%. Z kolei cenę sukienki najpierw obniżono o 15%, a następnie nową cenę podniesiono o 5%. Wynika z tego, że w efekcie tych zmian

N a) cena spodni jest większa od ceny sukienki;

T b) cena spodni jest równa cenie sukienki;

N c) cena spodni jest mniejsza od ceny sukienki.

Komentarz

Niech a oznacza początkową cenę spodni oraz sukienki.

Po 5%-owej podwyżce spodnie kosztują $a+a\cdot 5\%=a\cdot 1,05$. Po obniżce tej ceny o 15% cena spodni równa się $a\cdot 1,05-(a\cdot 1,05)\cdot 15\%=a\cdot 1,05\cdot 0,85$.

Z kolei po 15% obniżce sukienka kosztuje $a-a\cdot 15\%=a\cdot 0,85$. Po podniesieniu tej ceny o 5% cena sukienki wynosi $a\cdot 0,85+a\cdot 0,85\cdot 5\%=a\cdot 0,85\cdot 1,05$.

W efekcie tych zmian ceny spodni i sukienki są równe.

2. Liczba $6^6\cdot 12^{12}$ jest podzielna przez

T a) 8^8;

N b) 10^{10};

N c) 18^{18}.

Komentarz

a) Zauważmy, że $12^{12}=(2^2\cdot 3)^{12}=2^{24}\cdot 3^{12}$ oraz $8^8=(2^3)^8=2^{24}$. Wobec tego liczba 12^{12} jest podzielna przez 8^8, a więc również liczba $6^6\cdot 12^{12}$ jest podzielna przez 8^8.

b) Liczba 10^{10} jest podzielna przez 5, a iloczyn $6^6\cdot 12^{12}$ — nie jest.

c) Obie liczby 18^{18} oraz $6^6\cdot 12^{12}$ rozkładamy na czynniki pierwsze:

$$18^{18}=(2\cdot 3^2)^{18}=2^{18}\cdot 3^{36},$$

$$6^6\cdot 12^{12}=(2\cdot 3)^6\cdot (2^2\cdot 3)^{12}=2^6\cdot 3^6\cdot 2^{24}\cdot 3^{12}=2^{30}\cdot 3^{18}.$$

Widzimy stąd, że 18^{18} jest liczbą podzielną przez 3^{36}, a $6^6\cdot 12^{12}$ — nie. Wobec tego $6^6\cdot 12^{12}$ nie może być wielokrotnością liczby 18^{18}.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

3. Istnieje taka liczba rzeczywista x, że

T a) $x(x+1)=(x+1)(x+2)$;

T b) $x(x+1)=(x+2)(x+3)$;

T c) $x^2=(x+1)^2$.

Komentarz

a) Dla $x=-1$ mamy $x(x+1)=-1\cdot 0=0\cdot 1=(x+1)(x+2)$.

b) Dla $x=-\frac{3}{2}$ mamy $x(x+1)=-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=(x+2)(x+3)$.

c) Dla $x=-\frac{1}{2}$ mamy $x^2=(-\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2=(x+1)^2$.

4. Wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości. Wynika z tego, że

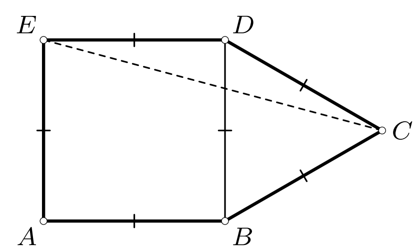
N a) wszystkie przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równej długości;

N b) proste AB i CE są równoległe;

N c) pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.

Komentarz

Niech $ABDE$ będzie kwadratem, a BCD — trójkątem równobocznym zbudowanym na zewnątrz tego kwadratu (rys. 1). Wówczas wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości.



rys. 1

a) Mamy $AD>BD$, gdyż w trójkącie prostokątnym ABD przeciwprostokątna jest dłuższa od przyprostokątnej.

b) Proste AB i DE są równoległe, a proste DE i CE nie są równoległe. Wobec tego proste AB i CE również nie są równoległe.

c) Nie wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe, np. $\sphericalangle EAB=90°$, a $\sphericalangle BCD=60°$. Wobec tego nie jest to pięciokąt foremny.

5. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez

N a) 3;

T b) 5;

T c) 7.

Komentarz

a) Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba o sumie cyfr 2, która jest podzielna przez 3.

b) Liczba 20 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 5.

c) Liczba 1001 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 7 $(1001=7\cdot 11\cdot 13)$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

6. Liczba całkowita a jest podzielna przez 6, a liczba całkowita b jest podzielna przez 10. Wynika z tego, że liczba

N a) $a+b$ jest podzielna przez 16;

T b) $a \cdot b$ jest podzielna przez 60;

T c) $5a+3b$ jest podzielna przez 15.

Komentarz

Ponieważ liczba a jest podzielna przez 6, więc $a=6k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Podobnie, skoro b jest liczbą podzielną przez 10, to $b=10\ell$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ.

b) Mamy $a \cdot b = 6k \cdot 10\ell = 60 \cdot k\ell$. Ponieważ liczba $k\ell$ jest całkowita, więc z ostatniej równości wynika, że liczba $a \cdot b$ dzieli się przez 60.

c) Mamy $5a+3b = 5 \cdot 6k + 3 \cdot 10\ell = 15 \cdot 2(k+\ell)$. Liczba $2(k+\ell)$ jest całkowita, więc z ostatniej zależności wynika, że liczba $5a+3b$ dzieli się przez 15.

a) Przyjmimy $a=6$ oraz $b=0$. Wtedy a jest liczbą podzielną przez 6, a b — liczbą podzielną przez 10. Jednak liczba $a+b=6$ nie jest podzielna przez 16.

7. Istnieje taka liczba całkowita n, że dwiema ostatnimi cyframi liczby n^2 są

T a) 44;

N b) 55;

N c) 66.

Komentarz

a) Przyjmijmy $n=12$. Wtedy $n^2=144$.

b) Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita n, że n^2 kończy się cyframi 55. Wówczas liczba n jest nieparzysta oraz podzielna przez 5. W związku z tym liczba n^2 jest nieparzysta i podzielna przez 25. Jednak każda liczba nieparzysta podzielna przez 25 kończy się cyframi 25 lub 75.

c) Liczba, której dwiema ostatnimi cyframi są 66 jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Taka liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

8. Trójkąt równoboczny można rozciąć na

T a) 4 trójkąty równoboczne;

T b) 6 trójkątów równobocznych;

T c) 1000 trójkątów równobocznych.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

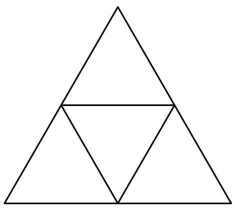
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Komentarz

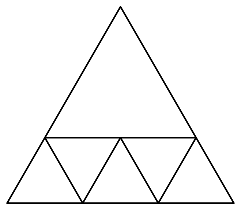
a) Trójkąt równoboczny można rozciąć na 4 trójkąty równoboczne wzdłuż odcinków łączących środki boków (rys. 2).

b) Trójkąt równoboczny o boku długości 3 można rozciąć na 5 trójkątów równobocznych o boku długości 1 oraz jeden trójkąt równoboczny o boku długości 2 — łącznie 6 trójkątów równobocznych (rys. 3).

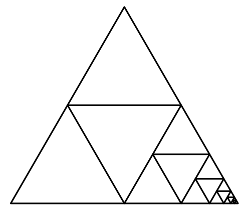
c) Zauważmy, że jedną z części uzyskanych w podziale z punktu a) można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne, tym samym otrzymując 3 dodatkowe kawałki. Następnie dowolny z tych kawałków można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne i otrzymać kolejne 3 części. Powtarzając tę czynność łącznie 332 razy, uzyskamy w końcu podział trójkąta równobocznego na $4+3\cdot 332=1000$ trójkątów równobocznych (rys. 4).



rys. 2



rys. 3



rys. 4

9. Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

N a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;

N b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;

N c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

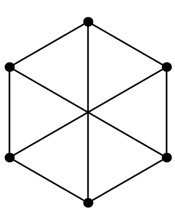
Komentarz

Na poniższych obrazkach każda gruba kropka oznacza osobę, a odcinek łączący dwie kropki — uścisk dłoni między odpowiadającymi im osobami.

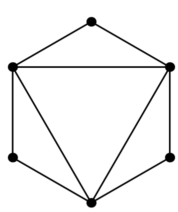
a) Może się zdarzyć, że każdy wymienił dokładnie 3 uściski dłoni (rys. 5).

b) Może się zdarzyć, że każdy wymienił 2 lub 4 uściski dłoni (rys. 6).

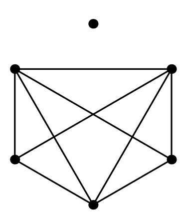
c) Może się zdarzyć, że pewna osoba nie wymieniła ani jednego uścisku dłoni (rys. 7).



rys. 5



rys. 6



rys. 7

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

10. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że wśród liczb $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ są

N a) dokładnie dwie dodatnie;

T b) dokładnie dwie ujemne;

N c) dokładnie trzy ujemne.

Komentarz

c) Gdyby wszystkie trzy dane iloczyny były ujemne, to ich iloczyn również byłby liczbą ujemną. Tymczasem

$$a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot a=(abc)^2$$

jest kwadratem liczby rzeczywistej, a więc liczbą nieujemną.

a) Przypuśćmy, że wśród danych trzech iloczynów są dokładnie dwa dodatnie. Wtedy żadna z liczb a, b, c nie jest równa 0; w przeciwnym razie co najmniej dwa spośród iloczynów $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ byłyby równe 0, a wtedy nie mogłoby być dwóch dodatnich. W związku z tym trzeci iloczyn nie może być równy 0, a więc musi być liczbą ujemną. Wówczas, podobnie jak w rozwiązaniu punktu c), uzyskujemy sprzeczną nierówność $(abc)^2<0$.

b) Przyjmując $a=1$ oraz $b=c=-1$, uzyskujemy

$$a\cdot b=-1,\quad b\cdot c=1,\quad c\cdot a=-1.$$

Wśród tych trzech liczb są dokładnie dwie ujemne.

11. Dokładnie 70% uczniów pewnej klasy uczy się języka angielskiego, dokładnie 50% uczy się języka niemieckiego oraz dokładnie 30% uczy się języka francuskiego. Wynika z tego, że

N a) każdy uczeń tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego;

N b) co najmniej połowa uczniów tej klasy uczy się co najmniej dwóch języków;

T c) istnieje osoba, która uczy się co najmniej dwóch języków, w tym niemieckiego.

Komentarz

a), b) Przypuśćmy, że w 10-osobowej klasie jest:

- 3 uczniów, którzy uczą się wszystkich trzech języków;
- 2 uczniów, którzy uczą się tylko niemieckiego;
- 4 uczniów, którzy uczą się tylko angielskiego;
- 1 uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego.

Wówczas warunki zadania są spełnione, a przy tym istnieje uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego oraz mniej niż połowa uczniów uczy się co najmniej dwóch języków.

c) Skoro 50% uczniów uczy się niemieckiego, a 70% uczniów uczy się angielskiego, to co najmniej 20% uczniów uczy się obu tych języków jednocześnie.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

12. Istnieje taki czworokąt wypukły, że każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty

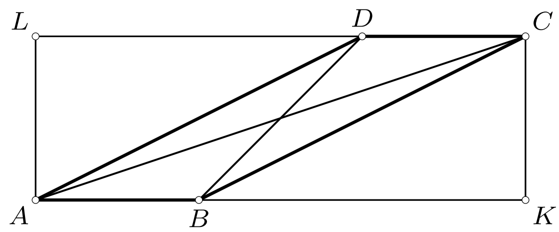
T	a) prostokątne;
N	b) ostrokątne;
T	c) rozwartokątne.

Komentarz

a) Każda przekątna prostokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.

b) Gdyby taki czworokąt istniał, to jego każdy kąt wewnętrzny byłby ostry. Jednak wówczas suma kątów wewnętrznych tego czworokąta byłaby mniejsza od $4 \cdot 90° = 360°$, co nie może mieć miejsca.

c) Rozważmy prostokąt $AKCL$, w którym $AK = 3$, $KC = 1$ oraz takie punkty B i D leżące odpowiednio na bokach AK i CL, że $AB = CD = 1$ (rys. 8). Wówczas kąty KBC, KBD, LDA, LDB są ostre, więc każda przekątna równoległoboku $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty rozwartokątne.



rys. 8

13. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n. Wynika z tego, że

N	a) każda cyfra liczby n jest równa 1;
T	b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy od 2;
N	c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr liczby n.

Komentarz

a) Jeżeli $n = 20$, to liczba n ma dwie cyfry i sumę cyfr równą 2.

c) Jeżeli $n=1000000009$, to suma cyfr i liczba cyfr liczby n są równe (obie wynoszą 10). Tymczasem suma cyfr liczby $n+1=1000000010$ jest równa 2, a zatem jest mniejsza od sumy cyfr liczby n.

b) Jeżeli pewna cyfra liczby n jest równa 0, to iloczyn cyfr liczby n jest także równy 0, a więc w szczególności jest on mniejszy od 2. W przeciwnym przypadku każda cyfra liczby n jest dodatnia. Wtedy z warunku, że suma cyfr liczby n jest równa liczbie jej cyfr wynika, że wszystkie cyfry liczby n równe są 1. Wówczas jednak także iloczyn cyfr takiej liczby jest mniejszy od 2.

14. Spośród wierzchołków sześcianu wybrano pięć. Wynika z tego, że wśród wybranych punktów istnieją

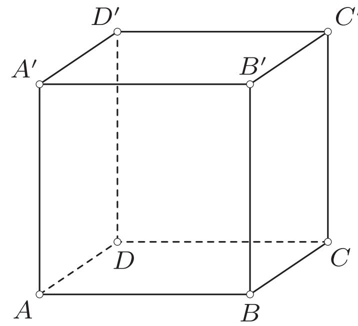
T a) dwa, które są połączone krawędzią sześcianu;

T b) trzy, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego;

N c) cztery, które są wierzchołkami prostokąta.

Komentarz

Rozważmy sześcian o przeciwległych ścianach $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oznaczonych tak, że odcinki AA', BB', CC', DD' są krawędziami sześcianu (rys. 9).



rys. 9

a) Skoro wybrano pięć punktów, to wybrano obydwa końce co najmniej jednej spośród krawędzi AA', BB', CC', DD'.

b) Zauważmy, że $AB'CD'$ oraz $A'BC'D$ to czworościany, których wszystkie krawędzie mają jednakową długość (równą długości przekątnej ściany sześcianu). Skoro wybrano pięć punktów, to pewne trzy należą do tego samego z tych dwóch czworościanów, a zatem wyznaczają trójkąt równoboczny.

c) Przypuśćmy, że wybrano punkty A, B, C, B', D'. Wówczas żadne cztery z tych punktów nie leżą w jednej płaszczyźnie; nie mogą więc być wierzchołkami prostokąta.

15. Dodatnie liczby całkowite a, b, c są takie, że liczby 2^a, 2^b, 2^c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że

T a) jest to trójkąt ostrokątny;

T b) liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta;

T c) co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są równe.

Komentarz

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a \leqslant b \leqslant c$.

c) Przypuśćmy, że $b < c$, czyli $b+1 \leqslant c$. Wówczas

$$2^a + 2^b \leqslant 2^b + 2^b = 2^{b+1} \leqslant 2^c,$$

co przeczy nierówności trójkąta o bokach 2^a, 2^b, 2^c. To oznacza, że $b = c$.

b) Bezpośrednio sprawdzamy, że $a+b > b = c$, $b+c > b \geqslant a$, $c+a > c \geqslant a$, więc liczby a, b, c spełniają nierówność trójkąta.

a) Z poprzednich dwóch punktów wynika, że trójkąt o bokach 2^a, 2^b, 2^c jest równoramienny i długość ramienia jest w nim nie mniejsza od długości podstawy. Ponieważ w trójkącie naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt, więc wynika z tego, że kąt między ramionami jest nie większy od kąta między podstawą a ramieniem, a ten jest ostry w każdym trójkącie równoramiennym.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku