STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ JUNIORÓW

Zadania testowe

Olimpiady Matematycznej Juniorów

2011–2018

szkoła podstawowa i gimnazjum

WARSZAWA 2019

Autorzy rozwiązań zadań: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe

Recenzenci: dr Jerzy Bednarczuk, dr Waldemar Pompe

Podział tematyczny, kolejność zadań: Jerzy Bednarczuk

Skład komputerowy (systemem TEX/MEX): Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe

Rysunki: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-20-4

Nakład: 1000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Instytut Matematyczny PAN
00-656 Warszawa, ul. Śniadeckich 8
omj.edu.pl

Wstęp

W roku szkolnym 2011/2012 Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów, organizowanej wówczas jeszcze pod nazwą *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG)*, postanowił uatrakcyjnić zawody konkursowe. VII edycja OMG (2011/2012) została przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego (odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym) zostały dodatkowo rozbudowane o część testową. Decyzja ta była poparta przekonaniem, że dzięki tej zmianie Olimpiada zyska na popularności, dając możliwość udziału w zawodach każdemu gimnazjaliście, który pasjonuje się matematyką.

Wzrost popularności OMG podczas VII edycji był znaczący. W części testowej zawodów pierwszego stopnia wzięło udział ponad 14000 uczestników z ponad 1200 szkół. Około 4000 uczniów nadesłało swoje rozwiązania z części korespondencyjnej — czterokrotnie więcej niż w roku poprzednim. Od tego momentu część testowa zawodów pierwszego stopnia stała się stałym elementem zawodów.

Test odbywa się we wrześniu każdego roku, tego samego dnia i o tej samej godzinie we wszystkich szkołach, które zarejestrują swój udział w Olimpiadzie poprzez stronę internetową Olimpiady: `omj.edu.pl`. Podczas 75-minutowego sprawdzianu w warunkach kontrolowanej samodzielności uczestnik rozwiązuje 15 zadań zamkniętych. Każde zadanie testowe składa się z trzech niezależnych stwierdzeń, z których część jest prawdziwa, a część fałszywa (mogą być także wszystkie prawdziwe lub wszystkie fałszywe). Zadaniem uczestnika jest rozstrzygnięcie, które z tych trzech stwierdzeń są prawdziwe. Jeśli uczeń poda poprawne odpowiedzi we wszystkich trzech przypadkach, otrzymuje 1 punkt. Podanie poprawnych odpowiedzi w dwóch przypadkach premiowane jest 1/2 punktu. W pozostałych przypadkach uczeń nie otrzymuje punktów.

Wynikiem uzyskanym w zawodach pierwszego stopnia jest suma punktów obu części: korespondencyjnej i testowej. Z części korespondencyjnej można uzyskać maksymalnie 42 punkty, z testowej — 15 punktów.

Niniejsza publikacja zawiera wszystkie zadania testowe OMJ do XIV edycji Olimpiady w roku szkolnym 2018/2019, w tym także pytania testu próbnego, który został przygotowany we wrześniu 2011 roku, jeszcze przed pierwszym testem. Zadania zostały pogrupowane tematycznie. Obszerną część opracowania stanowią odpowiedzi do każdego pytania, które opatrzono szczegółowym wyjaśnieniem. Ciekawym uzupełnieniem jest końcowa część zawierająca informację o tym, jak na pytania testowe odpowiadali uczestnicy Olimpiady.

Zadania testowe OMJ są łatwiejsze od otwartych zadań olimpijskich, jednak na ogół trudniejsze od typowych zadań szkolnych. Dlatego swoją przygodę z olimpijską matematyką warto rozpocząć już w szkole podstawowej od prób samodzielnego rozwiązania zadań testowych OMJ. Mamy nadzieję, że niniejsza publikacja okaże się w tym pomocna.

Warszawa, wrzesień 2019 r.

Waldemar Pompe
przewodniczący Komisji Zadaniowej OMJ

Treści zadań

Liczby rzeczywiste

1. Zmieszano 1 litr 4% roztworu soli kuchennej w wodzie z 2 litrami 4% roztworu soli kuchennej w wodzie. Otrzymano wówczas roztwór o stężeniu

- a) 4%;
- b) 6%;
- c) 12%.

2. Mieszając w odpowiednich proporcjach roztwory soli kuchennej w wodzie, o stężeniach 10% i 30%, można otrzymać roztwór o stężeniu

- a) 20%;
- b) 27%;
- c) 40%.

3. W sklepie „U Bronka" cena spodni była równa cenie sukienki. Cenę spodni najpierw podniesiono o 5%, a następnie nową cenę obniżono o 15%. Z kolei cenę sukienki najpierw obniżono o 15%, a następnie nową cenę podniesiono o 5%. Wynika z tego, że w efekcie tych zmian

- a) cena spodni jest większa od ceny sukienki;
- b) cena spodni jest równa cenie sukienki;
- c) cena spodni jest mniejsza od ceny sukienki.

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

- a) towar X był o 20% droższy od towaru Y;
- b) towar X był o 25% droższy od towaru Y;
- c) towar X był o 30% droższy od towaru Y.

5. Dane są takie dodatnie liczby a i b, że 30% liczby a jest równe 60% liczby b. Wynika z tego, że

- a) $a=2b$;
- b) $b=2a$;
- c) liczba a jest o 100% większa od liczby b.

6. Dodatnia liczba a powiększona o 50% jest równa dodatniej liczbie b pomniejszonej o 50%. Wynika z tego, że liczba b jest

☐ a) 2 razy większa od liczby a;

☐ b) 3 razy większa od liczby a;

☐ c) 4 razy większa od liczby a.

7. W każdym z trzech lat 2018, 2019 i 2020 pensja pana Antoniego będzie o 5% większa od jego pensji z roku poprzedniego. Wynika z tego, że pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie większa od jego pensji z roku 2017 o

☐ a) dokładnie 15%;

☐ b) więcej niż 15%;

☐ c) mniej niż 15%.

8. Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której

☐ a) $||x-1|+2|=0$;

☐ b) $||x-1|+2|=1$;

☐ c) $||x-1|+2|=2$.

9. Istnieje taka liczba rzeczywista x, że

☐ a) $x(x+1)=(x+1)(x+2)$;

☐ b) $x(x+1)=(x+2)(x+3)$;

☐ c) $x^2=(x+1)^2$.

10. Liczby rzeczywiste x, y są różne od 0 oraz spełniają warunek $2x=3y$. Wynika z tego, że

☐ a) $x \leqslant y$;

☐ b) $x \geqslant y$;

☐ c) $x \neq y$.

11. Liczby a, b, c są dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a-b=\dfrac{c}{3} \\ a+b=\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Wynika z tego, że

☐ a) $b<c$ oraz $c<a$;

☐ b) $a<b$ oraz $b<c$;

☐ c) $b<a$ oraz $a<c$.

12. Dodatnie liczby a, b spełniają warunek $a+b=1$. Wynika z tego, że

- a) $a^2+b^2<1$;
- b) $\sqrt{a}+\sqrt{b}<1$;
- c) $ab<1$.

13. Nierówność $\sqrt{x^2-1}>x$

- a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;
- b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;
- c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $a>b$ oraz $c>d$. Wynika z tego, że

- a) $a+c > b+d$;
- b) $a-c > b-d$;
- c) $ac > bd$.

15. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a\geqslant b$. Wynika z tego, że

- a) $a^2\geqslant ab$;
- b) $a^2\geqslant b^2$;
- c) $a^3\geqslant b^3$.

16. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że wśród liczb $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ są

- a) dokładnie dwie dodatnie;
- b) dokładnie dwie ujemne;
- c) dokładnie trzy ujemne.

17. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

- a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od $1/5$;
- b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od $1/2$;
- c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

18. Równanie $x^2-2|x|=0$ ma

- a) co najmniej jedno rozwiązanie;
- b) dokładnie dwa rozwiązania;
- c) więcej niż dwa rozwiązania.

19. Nierówność $(x^2+2)x<x$

- [ ] a) nie ma rozwiązań;
- [ ] b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;
- [ ] c) jest spełniona przez pewną liczbę dodatnią.

20. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x(x+2)<y(y+2)$. Wynika z tego, że

- [ ] a) $x<y$;
- [ ] b) $x+y\neq -2$;
- [ ] c) $|x+1|<|y+1|$.

21. Nierówność $(x-4)(x-9)>0$ jest prawdziwa dla

- [ ] a) $x=\sqrt{3}$;
- [ ] b) $x=\sqrt{7}$;
- [ ] c) $x=\sqrt{17}$.

22. Antek, biegnąc z prędkością x km/h, jeden kilometr pokonuje w ciągu x minut, gdzie x jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wynika z tego, że

- [ ] a) x jest liczbą wymierną;
- [ ] b) Antek biegnie z prędkością większą niż 8 km/h;
- [ ] c) gdyby Antek szedł z prędkością $\frac{1}{2}x$ km/h, to jeden kilometr pokonywałby w ciągu $2x$ minut.

Liczby wymierne i niewymierne

23. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że

- [ ] a) obie liczby a i b są niewymierne;
- [ ] b) co najmniej jedna z liczb a, b jest wymierna;
- [ ] c) co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

24. Liczba $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ jest

- [ ] a) niewymierna;
- [ ] b) mniejsza od 2;
- [ ] c) równa $\sqrt[n]{2}$ dla pewnej liczby całkowitej $n>1$.

25. Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}}$ jest

- [ ] a) całkowita;
- [ ] b) niewymierna;
- [ ] c) większa od $1,8$.

26. Liczba $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

- [ ] a) niewymierna;
- [ ] b) całkowita;
- [ ] c) większa od $\dfrac{2}{3}$.

27. Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest

- [ ] a) całkowita;
- [ ] b) niewymierna;
- [ ] c) dodatnia.

28. Liczba $\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[3]{27}}$ jest

- [ ] a) niewymierna;
- [ ] b) równa $\sqrt[3]{27}$;
- [ ] c) całkowita.

29. Liczba $\sqrt{0,4444\ldots}$ jest

- [ ] a) wymierna;
- [ ] b) równa $0,2222\ldots$;
- [ ] c) większa od $0,5$.

30. Liczba $\dfrac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\cdot\dfrac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\cdot\dfrac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$ jest

- [ ] a) wymierna;
- [ ] b) większa od 1;
- [ ] c) równa $\sqrt{30}$.

31. Liczby wymierne a, b, c są różne i każdy z iloczynów $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ jest liczbą całkowitą. Wynika z tego, że

- [ ] a) co najmniej jedna z liczb a, b, c jest całkowita;
- [ ] b) co najmniej dwie z liczb a, b, c są całkowite;
- [ ] c) każda z liczb a, b, c jest całkowita.

32. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Wynika z tego, że

☐ a) liczba $x+y$ jest niewymierna;

☐ b) liczba $x \cdot y$ jest niewymierna;

☐ c) liczba $x+y+x \cdot y$ jest niewymierna.

33. Dane są takie liczby a, b, że $a>b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

☐ a) liczba $a-b$ jest wymierna;

☐ b) liczba ab jest wymierna;

☐ c) obie liczby a i b są wymierne.

34. Liczby a, b są dodatnie oraz liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ i $a-b$ są wymierne. Wynika z tego, że

☐ a) wymierna jest liczba $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

☐ b) wymierna jest każda z liczb $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$;

☐ c) wymierna jest liczba $a+b$.

35. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, że liczby a^2+b^2 oraz ab są wymierne. Wynika stąd, że wymierna jest liczba

☐ a) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$;

☐ b) $(a+b)^2$;

☐ c) $a+b$.

36. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

☐ a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;

☐ b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;

☐ c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.

37. Liczba a^2 jest niewymierna. Wynika z tego, że liczba

☐ a) a jest niewymierna;

☐ b) a jest wymierna;

☐ c) a^4 jest wymierna.

Liczby całkowite

38. Suma pewnych czterech różnych dodatnich liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Wynika z tego, że

- [ ] a) co najmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta;
- [ ] b) iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą;
- [ ] c) co najmniej dwie z tych liczb są parzyste.

39. Istnieje 2011 takich różnych liczb pierwszych, że

- [ ] a) ich suma jest liczbą nieparzystą;
- [ ] b) ich suma jest liczbą parzystą;
- [ ] c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.

40. Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cyfra liczby p jest równa

- [ ] a) 0 lub 7;
- [ ] b) 1 lub 3;
- [ ] c) 2 lub 5.

41. Dodatnią liczbę całkowitą n zwiększono o 50%, a następnie wynik zmniejszono o 50%. W rezultacie otrzymano liczbę całkowitą m. Wynika z tego, że

- [ ] a) $m = n$;
- [ ] b) liczba n jest podzielna przez 4;
- [ ] c) liczba m jest podzielna przez 3.

42. Liczby całkowite a, b, c są dodatnie. Każda z nich daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Wynika z tego, że

- [ ] a) liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3;
- [ ] b) suma cyfr liczby $a+b+c$ jest podzielna przez 3;
- [ ] c) liczby $a+b$ oraz c są różne.

43. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że

- [ ] a) każda z liczb x i y jest podzielna przez 3;
- [ ] b) liczba $x^2 + y^2$ jest podzielna przez 3;
- [ ] c) liczba $x^2 - y^2$ jest podzielna przez 3.

44. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których

- a) różnica jest podzielna przez 4;
- b) suma jest podzielna przez 4;
- c) iloczyn jest podzielny przez 4.

45. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $ab+bc+cd+da$ jest podzielna przez 5. Wynika z tego, że podzielna przez 5 jest co najmniej jedna z liczb

- a) $a+b$, $c+d$;
- b) $a+c$, $b+d$;
- c) $a+d$, $b+c$.

46. Dodatnia liczba całkowita n jest podzielna przez każdą z następujących dziewięciu liczb: $1, 2, 3, \ldots, 9$. Wynika z tego, że liczba n jest

- a) podzielna przez 10;
- b) podzielna przez 27;
- c) większa lub równa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9$.

47. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez

- a) 3;
- b) 5;
- c) 7.

48. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

- a) 4;
- b) 5;
- c) 6.

49. Istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n, aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby

- a) 3;
- b) 5;
- c) 7.

50. Dane są takie liczby całkowite a i b, że liczby $a+b$ i $a-b$ są podzielne przez 12. Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

- a) 2;
- b) 3;
- c) 4.

51. Liczba całkowita a jest podzielna przez 6, a liczba całkowita b jest podzielna przez 10. Wynika z tego, że liczba

- [ ] a) $a+b$ jest podzielna przez 16;
- [ ] b) $a\cdot b$ jest podzielna przez 60;
- [ ] c) $5a+3b$ jest podzielna przez 15.

52. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a. Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

- [ ] a) 10;
- [ ] b) 13;
- [ ] c) 30.

53. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

- [ ] a) 2;
- [ ] b) 3;
- [ ] c) 5.

54. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n. Wynika z tego, że

- [ ] a) każda cyfra liczby n jest równa 1;
- [ ] b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy od 2;
- [ ] c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr liczby n.

55. Liczba $\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ trójek}}$ jest podzielna przez 99. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna

- [ ] a) przez 3;
- [ ] b) przez 6;
- [ ] c) przez 9.

56. Liczby a i b są całkowite. Wynika z tego, że liczba $2a(a+1)(a+2)+3b(b+1)$ jest podzielna przez

- [ ] a) 4;
- [ ] b) 5;
- [ ] c) 6.

57. Liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez

- a) 8^8;
- b) 10^{10};
- c) 18^{18}.

58. Liczba $9^{16} - 16^9$ jest podzielna przez

- a) 4;
- b) 5;
- c) $3^{16} - 4^9$.

59. Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest

- a) podzielna przez 5;
- b) podzielna przez 9;
- c) liczbą pierwszą.

60. Iloczyn $a \cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

- a) 5;
- b) 8;
- c) 10.

61. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

- a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2;
- b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2;
- c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

62. Liczba dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest równa

- a) 2^{1009};
- b) 2^{2017};
- c) $\left(-\sqrt{2}\right)^{4034}$.

63. Istnieją takie różne liczby pierwsze p, q, że liczba

- a) $pq+1$ jest liczbą pierwszą;
- b) $pq+1$ jest liczbą złożoną;
- c) $p+q$ jest liczbą pierwszą.

64. Liczba naturalna a jest dwucyfrowa, a liczba naturalna b jest trzycyfrowa. Wynika z tego, że

a) suma $a+b$ jest liczbą trzycyfrową;

b) iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą czterocyfrową;

c) suma $a+b$ ma mniej cyfr niż iloczyn $a \cdot b$.

65. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Wynika z tego, że

a) liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej;

b) liczba n jest iloczynem co najmniej dwóch różnych liczb pierwszych;

c) liczba n^2 ma dokładnie sześć różnych dodatnich dzielników.

66. Dodatnie liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Ponadto liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;

b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a+b$ jest równy 1;

c) liczba $a+b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

67. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wynika z tego, że w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych można przedstawić także liczbę

a) $2n$;

b) $3n$;

c) $4n$.

68. Istnieje taka liczba całkowita n, że dwiema ostatnimi cyframi liczby n^2 są

a) 44;

b) 55;

c) 66.

69. Każde dwie spośród trzech dodatnich liczb całkowitych a, b, c są różne. Ponadto liczby te spełniają zależności $\mathrm{NWD}(a,b)=1$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c)=1$. Wynika z tego, że

a) $\mathrm{NWD}(b,c)=1$;

b) $\mathrm{NWD}(a,b+c)=1$;

c) $\mathrm{NWD}(a,bc)=1$.

70. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy 4^{100}. Wynika z tego, że

- [ ] a) liczba n jest parzysta;
- [ ] b) liczba n ma co najmniej 100 cyfr;
- [ ] c) suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od 400.

71. Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ jest naturalna. Wynika z tego, że liczba n jest

- [ ] a) podzielna przez 2;
- [ ] b) podzielna przez 3;
- [ ] c) większa od $\sqrt{2014}$.

72. Dodatnie liczby całkowite m, n spełniają warunek $m>n$. Wynika z tego, że

- [ ] a) $m \geqslant n+1$;
- [ ] b) $\sqrt{m} \geqslant \sqrt{n}+1$;
- [ ] c) $m^2 \geqslant n^2+3$.

Geometria płaska

73. Miary α, β, γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha+\beta<\gamma$. Wynika z tego, że

- [ ] a) trójkąt ten jest ostrokątny;
- [ ] b) trójkąt ten jest rozwartokątny;
- [ ] c) taki trójkąt nie istnieje.

74. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta oraz $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Wynika z tego, że jest to trójkąt

- [ ] a) równoramienny;
- [ ] b) równoboczny;
- [ ] c) ostrokątny.

75. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że istnieje trójkąt o bokach długości

- [ ] a) $a+1$, $b+1$, $c+1$;
- [ ] b) a^2, b^2, c^2;
- [ ] c) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

76. Dodatnie liczby całkowite a, b, c są takie, że liczby 2^a, 2^b, 2^c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że

- [ ] a) jest to trójkąt ostrokątny;
- [ ] b) liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta;
- [ ] c) co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są równe.

77. W trójkącie ABC wysokości AE i BF są równe. Wynika z tego, że

- [ ] a) wszystkie wysokości tego trójkąta są równe;
- [ ] b) kąty BAC i ABC są równe;
- [ ] c) środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

78. Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od 1. Wynika z tego, że

- [ ] a) trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od 1;
- [ ] b) każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od 1;
- [ ] c) pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

79. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Wynika z tego, że

- [ ] a) każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40°;
- [ ] b) trójkąt ABP jest ostrokątny;
- [ ] c) punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

80. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC = AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D. Wynika z tego, że kąt ADC jest

- [ ] a) równy $3 \cdot \sphericalangle DAC$;
- [ ] b) większy od kąta ACB;
- [ ] c) mniejszy od kąta BAC.

81. Istnieje trójkąt, w którym różnica miar pewnych dwóch kątów wewnętrznych jest równa

- [ ] a) 90°;
- [ ] b) 100°;
- [ ] c) 200°.

82. Trójkąt równoboczny można rozciąć na

- a) 4 trójkąty równoboczne;
- b) 6 trójkątów równobocznych;
- c) 1000 trójkątów równobocznych.

83. Trójkąt T rozcięto wzdłuż odcinka na dwa trójkąty T_1 i T_2, a trójkąt S — na trójkąty S_1 i S_2. Okazało się, że trójkąt T_1 jest przystający do trójkąta S_1, a trójkąt T_2 jest przystający do trójkąta S_2. Wynika z tego, że trójkąty T i S

- a) mają równe pola;
- b) mają równe obwody;
- c) są przystające.

84. Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości 3 oraz 4. Wynika z tego, że trzeci bok tego trójkąta ma długość

- a) nie mniejszą od 5;
- b) nie większą od 5;
- c) równą 5.

85. Dany jest taki trójkąt ABC, że $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R, a promień okręgu wpisanego jest równy r. Wynika z tego, że

- a) $AB = R$;
- b) $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;
- c) pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2.

86. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 50^\circ$. Wynika z tego, że

- a) $\sphericalangle AIB = 100^\circ$;
- b) $\sphericalangle AIB > 110^\circ$;
- c) $\sphericalangle AIB < 120^\circ$.

87. W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E. Wynika z tego, że

- a) $EA = BC$;
- b) $CA = 2 \cdot BC$;
- c) proste EC i AB są równoległe.

88. Każdy z dwóch boków trójkąta ostrokątnego ma długość 2. Wynika z tego, że

- [ ] a) pole tego trójkąta jest mniejsze od 2;
- [ ] b) każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2;
- [ ] c) trzeci bok tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.

89. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Wynika z tego, że

- [ ] a) $2 \cdot DM < AB$;
- [ ] b) $CD \leqslant AC$ oraz $CD \leqslant BC$;
- [ ] c) $CM < AC$ oraz $CM < BC$.

90. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC. Wynika z tego, że

- [ ] a) $2 \cdot AM < 3 \cdot BC$;
- [ ] b) pola trójkątów ABM i ACM są równe;
- [ ] c) $\sphericalangle CAM = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

91. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, dla których

$$AB < A'B', \quad BC < B'C' \quad \text{oraz} \quad CA < C'A'.$$

Wynika z tego, że

- [ ] a) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od obwodu trójkąta $A'B'C'$;
- [ ] b) pole trójkąta ABC jest mniejsze od pola trójkąta $A'B'C'$;
- [ ] c) istnieje trójkąt przystający do trójkąta ABC, który można umieścić wewnątrz trójkąta $A'B'C'$.

92. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o

- [ ] a) 20%;
- [ ] b) 40%;
- [ ] c) 44%.

93. Istnieje kwadrat, w którym przekątna jest dłuższa od boku o dokładnie

- [ ] a) 1;
- [ ] b) $\sqrt{2}$;
- [ ] c) $\sqrt{2}-1$.

94. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

- a) $AB \cdot BC < 1$;
- b) $AB < 1$;
- c) $AC < \sqrt{2}$.

95. Punkt P znajduje się wewnątrz prostokąta $ABCD$ o polu 1, przy czym $AB > BC$. Wynika z tego, że

- a) co najmniej jeden z trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP ma pole mniejsze od $0,26$;
- b) suma pól trójkątów ABP i CDP jest większa od $0,5$;
- c) suma pól trójkątów ABP i BCP jest większa od $0,5$.

96. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że ten czworokąt jest

- a) rombem;
- b) prostokątem;
- c) równoległobokiem.

97. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

- a) czworokąt ten jest kwadratem;
- b) czworokąt ten jest rombem;
- c) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

98. Istnieje taki czworokąt wypukły, że każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty

- a) prostokątne;
- b) ostrokątne;
- c) rozwartokątne.

99. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wynika z tego, że

- a) pola trójkątów BCD i BAD są równe;
- b) środek przekątnej BD należy do przekątnej AC;
- c) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

100. Każdy bok pewnego czworokąta ma długość mniejszą od 1. Wynika z tego, że

- a) pole tego czworokąta jest mniejsze od 1;
- b) istnieje kwadrat o boku 1, w którym ten czworokąt jest zawarty;
- c) długość każdej przekątnej tego czworokąta jest mniejsza od $\sqrt{2}$.

101. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu i $AB = BC$. Wynika z tego, że

- [ ] a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$;
- [ ] b) $CD = DA$;
- [ ] c) czworokąt $ABCD$ jest rombem.

102. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O, przy czym $\sphericalangle OAB = 45°$. Punkt C leży na dłuższym łuku AB tego okręgu. Wynika z tego, że

- [ ] a) $\sphericalangle ABO = 45°$;
- [ ] b) $\sphericalangle ACB = 45°$;
- [ ] c) $\sphericalangle ABC < 130°$.

103. Wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości. Wynika z tego, że

- [ ] a) wszystkie przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równej długości;
- [ ] b) proste AB i CE są równoległe;
- [ ] c) pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.

104. Wszystkie kąty sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ są równe. Wynika z tego, że

- [ ] a) proste AB i DE są równoległe;
- [ ] b) odcinki BC i EF są równej długości;
- [ ] c) sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny.

105. Sześciokąt foremny podzielono na sześć przystających wielokątów wypukłych. Wynika z tego, że każdy z tych wielokątów ma co najmniej

- [ ] a) jeden kąt wewnętrzny o mierze $60°$;
- [ ] b) jeden kąt wewnętrzny o mierze $120°$;
- [ ] c) dwa kąty wewnętrzne ostre.

106. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku S. Wynika z tego, że

- [ ] a) $AB + CD + EF = BC + DE + FA$;
- [ ] b) $AD = BE = CF$;
- [ ] c) suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS, DES, FAS.

107. Wielokąt A ma co najmniej osiem wierzchołków oraz dwa razy więcej boków niż wielokąt B. Wynika z tego, że wielokąt A ma

- [ ] a) dwa razy więcej wierzchołków niż wielokąt B;
- [ ] b) dwa razy więcej przekątnych niż wielokąt B;
- [ ] c) parzystą liczbę przekątnych.

108. Dany jest 101-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{101}$. Wynika z tego, że

☐ a) trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny;

☐ b) trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny;

☐ c) pewien trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ jest prostokątny.

109. Istnieje n-kąt wypukły ($n \geqslant 4$), w którym liczba przekątnych

☐ a) jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym dodatnim;

☐ b) równa jest liczbie wierzchołków;

☐ c) jest mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

110. Odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB. Wynika z tego, że

☐ a) pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF;

☐ b) obwód trójkąta ABE jest mniejszy od obwodu trójkąta ABF;

☐ c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest mniejszy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF.

111. Każdy punkt okręgu ω o promieniu 1 pomalowano na czarno lub biało w taki sposób, że każda cięciwa tego okręgu o długości 1 ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że

☐ a) każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów;

☐ b) każdy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg ω ma wszystkie trzy wierzchołki tego samego koloru;

☐ c) każdy kwadrat wpisany w okrąg ω ma dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

112. Spośród wierzchołków pewnego dwunastokąta foremnego wyróżniono siedem. Wynika z tego, że wśród wyróżnionych punktów można wskazać takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta

☐ a) prostokątnego;

☐ b) równobocznego;

☐ c) rozwartokątnego równoramiennego.

Geometria przestrzenna

113. Liczba krawędzi pewnego ostrosłupa jest o 15 większa od liczby jego wszystkich wierzchołków. Wynika z tego, że ten ostrosłup ma dokładnie

- [ ] a) 15 ścian bocznych;
- [ ] b) 16 ścian bocznych;
- [ ] c) 17 ścian bocznych.

114. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa

- [ ] a) 3^{100};
- [ ] b) 5^{100};
- [ ] c) $100\,001$.

115. Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 15^{14}

- [ ] a) wierzchołków;
- [ ] b) krawędzi;
- [ ] c) ścian.

116. Dany jest ostrosłup o parzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równą długość. Wynika z tego, że liczba krawędzi danego ostrosłupa jest mniejsza od

- [ ] a) 9;
- [ ] b) 11;
- [ ] c) 13.

117. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB, BSC, CSA są równe. Wynika z tego, że

- [ ] a) $AS = BS = CS$;
- [ ] b) $AB = BC = CA$;
- [ ] c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

118. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

- [ ] a) dłuższa od krawędzi podstawy;
- [ ] b) równa krawędzi podstawy;
- [ ] c) krótsza od krawędzi podstawy.

119. W czworościanie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

☐ a) $AD \geqslant BC$;

☐ b) kąt CDA jest prosty;

☐ c) $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

120. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Wynika z tego, że

☐ a) $AK = AL$;

☐ b) $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$;

☐ c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD.

121. Co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1. Wynika z tego, że

☐ a) co najmniej 8 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1;

☐ b) co najmniej jedna ściana prostopadłościanu $\mathcal{P}$ jest kwadratem;

☐ c) prostopadłościan $\mathcal{P}$ jest sześcianem.

122. Spośród wierzchołków sześcianu wybrano pięć. Wynika z tego, że wśród wybranych punktów istnieją

☐ a) dwa, które są połączone krawędzią sześcianu;

☐ b) trzy, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego;

☐ c) cztery, które są wierzchołkami prostokąta.

123. Pole powierzchni sześcianu A jest 4 razy mniejsze od pola powierzchni sześcianu B. Wynika z tego, że

☐ a) krawędź sześcianu A jest 2 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

☐ b) krawędź sześcianu A jest 4 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

☐ c) objętość sześcianu A jest 8 razy mniejsza od objętości sześcianu B.

124. Sześcian można rozciąć płaskim cięciem na dwa wielościany w taki sposób, aby jeden z tych wielościanów

☐ a) był graniastosłupem pięciokątnym;

☐ b) miał osiem ścian;

☐ c) był ostrosłupem prawidłowym.

125. Sześcian można rozciąć na

☐ a) trzy ostrosłupy czworokątne;

☐ b) cztery graniastosłupy trójkątne;

☐ c) pięć czworościanów;

126. Sześcian o krawędzi 1 można tak przeciąć płaszczyzną, aby uzyskać w przekroju prostokąt, którego pole jest

- [ ] a) większe od 1;
- [ ] b) równe 1;
- [ ] c) mniejsze od 1.

127. Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju trójkąt. Wynika z tego, że

- [ ] a) każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie dwie ściany trójkątne;
- [ ] b) w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie;
- [ ] c) każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem lub czworokątem.

128. Ostrosłup o podstawie będącej 10-kątem wypukłym rozcięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pewien wielokąt. Wynika z tego, że

- [ ] a) wielokąt ten ma co najwyżej 10 wierzchołków;
- [ ] b) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, ma więcej niż 7 wierzchołków;
- [ ] c) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, jest ostrosłupem.

129. Dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B nie leżące na tej płaszczyźnie. Niech C i D będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na płaszczyznę π. Wynika z tego, że

- [ ] a) punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie;
- [ ] b) płaszczyzna π jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej punkty A, C i D.
- [ ] c) $AB \geqslant CD$.

Kombinatoryka

130. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że

- [ ] a) pewne trzy boki są tego samego koloru;
- [ ] b) pewne dwie przekątne są różnych kolorów;
- [ ] c) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.

131. Każdy punkt prostej pomalowano na czerwono albo na niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 zawarty w tej prostej ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że na tej prostej istnieje odcinek o końcach różnych kolorów, którego długość jest równa

- ☐ a) 4;
- ☐ b) 5;
- ☐ c) 6.

132. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że

- ☐ a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
- ☐ b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
- ☐ c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

133. Każda krawędź graniastosłupa n-kątnego została pomalowana na jeden z trzech kolorów w taki sposób, że w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się krawędzie trzech kolorów. Wynika z tego, że

- ☐ a) n jest liczbą parzystą;
- ☐ b) wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa mają ten sam kolor;
- ☐ c) ten graniastosłup ma po n krawędzi każdego koloru.

134. Dokładnie 70% uczniów pewnej klasy uczy się języka angielskiego, dokładnie 50% uczy się języka niemieckiego oraz dokładnie 30% uczy się języka francuskiego. Wynika z tego, że

- ☐ a) każdy uczeń tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego;
- ☐ b) co najmniej połowa uczniów tej klasy uczy się co najmniej dwóch języków;
- ☐ c) istnieje osoba, która uczy się co najmniej dwóch języków, w tym niemieckiego.

135. Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

- ☐ a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;
- ☐ b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;
- ☐ c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

Rozwiązania zadań

Liczby rzeczywiste

1. Zmieszano 1 litr 4% roztworu soli kuchennej w wodzie z 2 litrami 4% roztworu soli kuchennej w wodzie. Otrzymano wówczas roztwór o stężeniu

T a) 4%;

N b) 6%;

N c) 12%.

Wyjaśnienie

Roztwory, o których mowa w zadaniu, zawierają te same substancje i mają takie samo stężenie, są więc jednakowe. Po ich zmieszaniu otrzymano zatem tę samą ciecz — 4% roztwór soli kuchennej w wodzie.

---

2. Mieszając w odpowiednich proporcjach roztwory soli kuchennej w wodzie, o stężeniach 10% i 30%, można otrzymać roztwór o stężeniu

T a) 20%;

T b) 27%;

N c) 40%.

Wyjaśnienie

W a jednostkach roztworu o stężeniu $p\%$ znajduje się $\frac{a \cdot p}{100}$ jednostek soli. W takim razie mieszając a_1 jednostek roztworu o stężeniu $p_1\%$ oraz a_2 jednostek roztworu o stężeniu $p_2\%$, otrzymujemy $a_1 + a_2$ jednostek roztworu, w którym liczba jednostek soli jest równa

$$\frac{a_1 \cdot p_1}{100} + \frac{a_2 \cdot p_2}{100}.$$

To oznacza, że po zmieszaniu uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2}{100 \cdot (a_1 + a_2)} \cdot 100\% = \left(\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2}{a_1 + a_2}\right)\%.$$

a) W wyniku zmieszania jednej jednostki roztworu o stężeniu 10% z jedną jednostką roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 30}{2}\right)\% = 20\%.$$

b) W wyniku zmieszania trzech jednostek roztworu o stężeniu 10% z siedemnastoma jednostkami roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{3 \cdot 10 + 17 \cdot 30}{20}\right)\% = 27\%.$$

c) Mieszając dane roztwory, otrzymamy roztwór o stężeniu mniejszym od 30%. Rzeczywiście, w wyniku zmieszania a_1 jednostek roztworu o stężeniu 10% z a_2 jednostkami roztworu o stężeniu 30% uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 30}{a_1 + a_2}\right)\% < \left(\frac{a_1 \cdot 30 + a_2 \cdot 30}{a_1 + a_2}\right)\% = 30\%.$$

W związku z tym nie można otrzymać roztworu o stężeniu 40%.

3. W sklepie „U Bronka" cena spodni była równa cenie sukienki. Cenę spodni najpierw podniesiono o 5%, a następnie nową cenę obniżono o 15%. Z kolei cenę sukienki najpierw obniżono o 15%, a następnie nową cenę podniesiono o 5%. Wynika z tego, że w efekcie tych zmian

N a) cena spodni jest większa od ceny sukienki;

T b) cena spodni jest równa cenie sukienki;

N c) cena spodni jest mniejsza od ceny sukienki.

Wyjaśnienie

Niech a oznacza początkową cenę spodni oraz sukienki.

Po 5%-owej podwyżce spodnie kosztują $a+a\cdot 5\% = a\cdot 1,05$. Po obniżce tej ceny o 15% cena spodni równa się $a\cdot 1,05-(a\cdot 1,05)\cdot 15\% = a\cdot 1,05\cdot 0,85$.

Z kolei po 15% obniżce sukienka kosztuje $a-a\cdot 15\% = a\cdot 0,85$. Po podniesieniu tej ceny o 5% cena sukienki wynosi $a\cdot 0,85+a\cdot 0,85\cdot 5\% = a\cdot 0,85\cdot 1,05$.

W efekcie tych zmian ceny spodni i sukienki są równe.

---

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

N a) towar X był o 20% droższy od towaru Y;

T b) towar X był o 25% droższy od towaru Y;

N c) towar X był o 30% droższy od towaru Y.

Wyjaśnienie

Uzasadnimy, że towar X był o 25% droższy od towaru Y. Podamy dwa sposoby tego uzasadnienia.

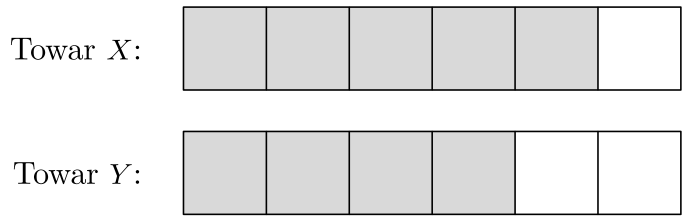
Sposób I

Oznaczmy przez x początkową cenę towaru X, a przez y początkową cenę towaru Y. Po podwyżce cena towaru X wynosi $x+\frac{20}{100}x=\frac{6}{5}x$. Z kolei cena towaru Y po podwyżce jest równa $y+\frac{50}{100}y=\frac{3}{2}y$. Wobec tego $\frac{6}{5}x=\frac{3}{2}y$, czyli $x=\frac{5}{4}y$, więc $x=\frac{125}{100}y=y+\frac{25}{100}y$.

Sposób II

Ponieważ aktualna cena towaru X jest równa $\frac{6}{5}$ ceny towaru przed podwyżką, więc pierwotna cena tego towaru wynosiła $\frac{5}{6}$ obecnej ceny. Podobnie uzasadniamy, że cena towaru Y wynosiła przed podwyżką $\frac{2}{3}$ aktualnej ceny.

Rozważmy dwa przystające prostokąty, symbolizujące obecne, równe ceny towarów X i Y (rys. 1). Oznaczmy na szaro części prostokątów, odpowiadające pierwotnym cenom towarów, czyli $\frac{5}{6}$ pierwszego i $\frac{2}{3}$ drugiego prostokąta. Zauważmy, że szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru X, jest o $\frac{1}{4}$ czyli 25% dłuższy niż szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru Y.



rys. 1

---

5. Dane są takie dodatnie liczby a i b, że 30% liczby a jest równe 60% liczby b. Wynika z tego, że

T a) $a=2b$;

N b) $b=2a$;

T c) liczba a jest o 100% większa od liczby b.

Wyjaśnienie

Warunki zadania można zapisać następująco

$$30\%\cdot a=60\%\cdot b,$$
$$\frac{30}{100}a=\frac{60}{100}b,$$
$$a=2b.$$

W szczególności wynika z tego, że $a=b+b=b+100\%\cdot b$.

---

6. Dodatnia liczba a powiększona o 50% jest równa dodatniej liczbie b pomniejszonej o 50%. Wynika z tego, że liczba b jest

N a) 2 razy większa od liczby a;

T b) 3 razy większa od liczby a;

N c) 4 razy większa od liczby a.

Wyjaśnienie

Z warunków zadania wynika, że

$$a+\frac{50}{100}a=b-\frac{50}{100}b,$$

skąd uzyskujemy $3a=b$.

---

7. W każdym z trzech lat 2018, 2019 i 2020 pensja pana Antoniego będzie o 5% większa od jego pensji z roku poprzedniego. Wynika z tego, że pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie większa od jego pensji z roku 2017 o

N a) dokładnie 15%;

T b) więcej niż 15%;

N c) mniej niż 15%.

Wyjaśnienie

Oznaczmy przez p_0 wysokość pensji pana Antoniego w 2017 roku. Wówczas pensja pana Antoniego w roku 2018 będzie wynosić

$$p_1 = p_0 + p_0 \cdot 5\% = p_0 + p_0 \cdot 0,05 = 1,05 \cdot p_0\,.$$

Analogicznie wyznaczamy pensje p_2 i p_3 pana Antoniego odpowiednio w latach 2019 i 2020:

$$p_2 = 1,05 \cdot p_1 = (1,05)^2 \cdot p_0\,,$$
$$p_3 = 1,05 \cdot p_2 = (1,05)^3 \cdot p_0\,.$$

Ponieważ $(1,05)^3 = 1,157625$, więc $p_3 = p_0 + p_0 \cdot 0,157625 = p_0 + p_0 \cdot 15,7625\%$. Pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie więc większa od jego pensji w roku 2017 o $15,7625\%$.

---

8. Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której

N a) $||x-1|+2| = 0$;

N b) $||x-1|+2| = 1$;

T c) $||x-1|+2| = 2$.

Wyjaśnienie

a) Dla każdej liczby x spełniona jest nierówność $|x-1| \geqslant 0$, więc $|x-1|+2 \geqslant 2$. Stąd wniosek, że $||x-1|+2| = |x-1|+2$. Wobec tego dane równanie przybiera postać $|x-1| = -2$, co prowadzi do sprzeczności.

b) Analogicznie jak wyżej, dane równanie przybiera postać $|x-1| = -1$, co spełnione być nie może.

c) Zauważmy, że $x = 1$ spełnia dane równanie.

Uwaga

Rozumując analogicznie jak w częściach a) i b), można uzasadnić, że liczba $x = 1$ jest jedyną liczbą spełniającą równanie z części c).

---

9. Istnieje taka liczba rzeczywista x, że

T a) $x(x+1) = (x+1)(x+2)$;

T b) $x(x+1) = (x+2)(x+3)$;

T c) $x^2 = (x+1)^2$.

Wyjaśnienie

a) Dla $x = -1$ mamy $x(x+1) = -1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = (x+1)(x+2)$.
b) Dla $x = -\frac{3}{2}$ mamy $x(x+1) = -\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = (x+2)(x+3)$.
c) Dla $x = -\frac{1}{2}$ mamy $x^2 = (-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 = (x+1)^2$.

---

10. Liczby rzeczywiste x, y są różne od 0 oraz spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika z tego, że

N a) $x \leqslant y$;

N b) $x \geqslant y$;

T c) $x \neq y$.

Wyjaśnienie

a) Jeżeli $(x, y) = (3, 2)$, to $2x = 3y$ oraz $x > y$.

b) Jeżeli $(x, y) = (-3, -2)$, to $2x = 3y$ oraz $x < y$.

c) Gdyby zachodziła równość $x = y$, to $2x = 3x$. Stąd $x = 0$ wbrew założeniu, że liczba x jest różna od 0.

---

11. Liczby a, b, c są dodatnie i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a - b = \dfrac{c}{3} \\ a + b = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Wynika z tego, że

N a) $b < c$ oraz $c < a$;

N b) $a < b$ oraz $b < c$;

T c) $b < a$ oraz $a < c$.

Wyjaśnienie

Liczba c jest dodatnia, więc z pierwszej równości wynika, że $a - b > 0$, czyli $b < a$. Liczby b i c są dodatnie, a zatem na mocy drugiej równości uzyskujemy $a < a + b = \dfrac{c}{2} < c$. Stąd ostatecznie $b < a$ oraz $a < c$.

---

12. Dodatnie liczby a, b spełniają warunek $a + b = 1$. Wynika z tego, że

T a) $a^2 + b^2 < 1$;

N b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$;

T c) $ab < 1$.

Wyjaśnienie

a) Zauważmy, że $(a + b)^2 = 1$, czyli $a^2 + 2ab + b^2 = 1$, zatem $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$. Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $2ab > 0$. Stąd wynika, że $a^2 + b^2 < 1$.

b) Przyjmując $a = \frac{1}{2}$ oraz $b = \frac{1}{2}$, otrzymujemy $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1$.

c) Skoro $a + b = 1$ oraz liczby a i b są dodatnie, to $a < 1$ i $b < 1$. Obie strony ostatnich nierówności są dodatnie, a zatem możemy je pomnożyć stronami. Otrzymujemy $ab < 1$.

---

13. Nierówność $\sqrt{x^2 - 1} > x$

N a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;

T b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;

T c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Wyjaśnienie

Każda liczba $x \leqslant -1$ spełnia podaną nierówność. Istotnie: jeśli $x \leqslant -1$, to $x^2 \geqslant 1$, czyli $x^2 - 1 \geqslant 0$, a zatem wyrażenie $\sqrt{x^2-1}$ jest określone. Ponadto $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$. Wobec tego $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0 > -1 \geqslant x$.

---

14. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $a > b$ oraz $c > d$. Wynika z tego, że

T a) $a+c > b+d$;

N b) $a-c > b-d$;

N c) $ac > bd$.

Wyjaśnienie

a) Ponieważ $a > b$, więc $a+c > b+c$.
Z kolei $c > d$, więc $b+c > b+d$, skąd wniosek, że $a+c > b+d$.

b) Przyjmijmy $a=3$, $b=2$ oraz $c=3$, $d=1$.
Wówczas $a > b$ oraz $c > d$, jednak $a-c=0$ oraz $b-d=1$, a więc $a-c < b-d$.

c) Niech $a=3$, $b=1$ oraz $c=-1$, $d=-2$.
Wówczas $a > b$ oraz $c > d$, jednak $ac=-3$ oraz $bd=-2$, a więc $ac < bd$.

Uwaga

Z części b) i c) wynika, że danych dwóch nierówności nie można ani odejmować ani mnożyć stronami. Rozumując podobnie jak w części a) można jednak uzasadnić, że nierówności $a > b$ oraz $c > d$ można pomnożyć stronami, jeśli założymy dodatkowo, że obie liczby b i c są dodatnie.

---

15. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a \geqslant b$. Wynika z tego, że

N a) $a^2 \geqslant ab$;

N b) $a^2 \geqslant b^2$;

T c) $a^3 \geqslant b^3$.

Wyjaśnienie

a), b) Jeżeli $a=-1$, $b=-2$, to nierówność $a \geqslant b$ jest spełniona, ale

$$a^2 = 1 < 2 = ab \quad \text{oraz} \quad a^2 = 1 < 4 = b^2.$$

c) Ponieważ $a \geqslant b$, więc możliwe są trzy przypadki: 1) $a \geqslant b \geqslant 0$, 2) $a > 0 > b$, 3) $0 \geqslant a \geqslant b$. W przypadku 1) obie strony nierówności $a \geqslant b$ są liczbami nieujemnymi, wobec tego możemy obie strony tej nierówności podnieść do dowolnej potęgi, będącej liczbą naturalną. W szczególności, uzyskujemy $a^3 \geqslant b^3$.

W przypadku 2) liczba a^3 jest dodatnia, a liczba b^3 jest ujemna, wobec czego $a^3 > b^3$.

Wreszcie w przypadku 3) obie liczby $-a$ i $-b$ są nieujemne oraz $-b \geqslant -a$. W związku z tym, podnosząc obie strony tej nierówności do trzeciej potęgi, uzyskujemy $(-b)^3 \geqslant (-a)^3$, czyli $a^3 \geqslant b^3$.

---

16. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, że wśród liczb $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ są

N a) dokładnie dwie dodatnie;

T b) dokładnie dwie ujemne;

N c) dokładnie trzy ujemne.

Wyjaśnienie

c) Gdyby wszystkie trzy dane iloczyny były ujemne, to ich iloczyn również byłby liczbą ujemną. Tymczasem

$$a\cdot b\cdot b\cdot c\cdot c\cdot a=(abc)^2$$

jest kwadratem liczby rzeczywistej, a więc liczbą nieujemną.

a) Przypuśćmy, że wśród danych trzech iloczynów są dokładnie dwa dodatnie. Wtedy żadna z liczb a, b, c nie jest równa 0; w przeciwnym razie co najmniej dwa spośród iloczynów $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ byłyby równe 0, a wtedy nie mogłoby być dwóch dodatnich. W związku z tym trzeci iloczyn nie może być równy 0, a więc musi być liczbą ujemną. Wówczas, podobnie jak w rozwiązaniu punktu c), uzyskujemy sprzeczną nierówność $(abc)^2<0$.

b) Przyjmując $a=1$ oraz $b=c=-1$, uzyskujemy

$$a\cdot b=-1,\quad b\cdot c=1,\quad c\cdot a=-1.$$

Wśród tych trzech liczb są dokładnie dwie ujemne.

---

17. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

T a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od $1/5$;

T b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od $1/2$;

N c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

Wyjaśnienie

Oznaczmy przez a, b, c i d długości czterech części, na które podzielono odcinek. Warunek dany w treści zadania oznacza, że $a+b+c+d=1$.

a) Przypuśćmy, że

$$a\leqslant\frac{1}{5},\quad b\leqslant\frac{1}{5},\quad c\leqslant\frac{1}{5}\quad\text{oraz}\quad d\leqslant\frac{1}{5}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, otrzymujemy $a+b+c+d\leqslant 4/5$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że długość co najmniej jednej części jest większa od $1/5$.

b) Przypuśćmy, że

$$a+b<\frac{1}{2},\quad a+c<\frac{1}{2},\quad a+d<\frac{1}{2},\quad b+c<\frac{1}{2},\quad b+d<\frac{1}{2}\quad\text{oraz}\quad c+d<\frac{1}{2}.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, uzyskujemy

$$3a+3b+3c+3d<\frac{6}{2},\quad\text{czyli}\quad a+b+c+d<1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że suma długości pewnych dwóch części jest nie mniejsza od $1/2$.

c) Przyjmijmy $a=1/10$, $b=1/10$, $c=3/10$, $d=5/10$. Wtedy $a+b+c+d=1$, lecz żadne trzy spośród tych czterech długości nie spełniają nierówności trójkąta.

---

18. Równanie $x^2-2|x|=0$ ma

T a) co najmniej jedno rozwiązanie;

N b) dokładnie dwa rozwiązania;

T c) więcej niż dwa rozwiązania.

Wyjaśnienie

Zauważmy, że $x^2=|x|^2$. Dane równanie możemy zatem zapisać w postaci równoważnej $|x|^2-2|x|=0$, czyli $|x|\cdot(|x|-2)=0$. Z kolei ta zależność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|=0$ lub $|x|=2$. Wobec tego równanie $x^2-2|x|=0$ ma dokładnie trzy rozwiązania: $x=0$, $x=2$ oraz $x=-2$.

---

19. Nierówność $(x^2+2)x<x$

N a) nie ma rozwiązań;

T b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;

N c) jest spełniona przez pewną liczbę dodatnią.

Wyjaśnienie

Przekształcając daną nierówność równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned}(x^2+2)x&<x\\ x^3+2x&<x\\ x^3+x&<0\\ x(x^2+1)&<0\,.\end{aligned}$$

Ponieważ $x^2+1>0$, więc zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór liczb ujemnych.

---

20. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x(x+2)<y(y+2)$. Wynika z tego, że

N a) $x<y$;

T b) $x+y\neq-2$;

T c) $|x+1|<|y+1|$.

Wyjaśnienie

b) Przypuśćmy, że $x+y=-2$. Wówczas $x+2=-y$ oraz $y+2=-x$ i wobec tego

$$x(x+2)=x\cdot(-y)=-xy \quad \text{oraz} \quad y(y+2)=y\cdot(-x)=-xy.$$

Stąd wynika, że liczby $x(x+2)$ i $y(y+2)$ są równe. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $x+y\neq 2$.

c) Daną w treści zadania nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$x(x+2)<y(y+2),$$
$$x^2+2x<y^2+2y,$$
$$x^2+2x+1<y^2+2y+1,$$
$$(x+1)^2<(y+1)^2,$$
$$|x+1|<|y+1|.$$

a) Przyjmując $x=0$, $y=-3$, otrzymujemy $x(x+2)=0$ oraz $y(y+2)=3$. Dla tak dobranych liczb zachodzi więc dana nierówność $x(x+2)<y(y+2)$, ale $x>y$.

---

21. Nierówność $(x-4)(x-9)>0$ jest prawdziwa dla

T a) $x=\sqrt{3}$;

T b) $x=\sqrt{7}$;

N c) $x=\sqrt{17}$.

Wyjaśnienie

Dana nierówność jest prawdziwa, gdy obie liczby $x-4$, $x-9$ są ujemne lub gdy obie są dodatnie. Pierwszy warunek oznacza, że $x<4$, a drugi jest spełniony jedynie dla $x>9$. Wobec tego dana nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x<4$ lub $x>9$.

a) Jeśli $x=\sqrt{3}$, to $x<\sqrt{16}=4$.

b) Jeśli $x=\sqrt{7}$, to $x<\sqrt{16}=4$.

c) Jeśli $x=\sqrt{17}$, to $x>\sqrt{16}=4$ oraz $x<\sqrt{81}=9$.

---

22. Antek, biegnąc z prędkością x km/h, jeden kilometr pokonuje w ciągu x minut, gdzie x jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wynika z tego, że

N a) x jest liczbą wymierną;

N b) Antek biegnie z prędkością większą niż 8 km/h;

T c) gdyby Antek szedł z prędkością $\frac{1}{2}x$ km/h, to jeden kilometr pokonywałby w ciągu $2x$ minut.

Wyjaśnienie

Skoro Antek pokonuje jeden kilometr w ciągu x minut, to biegnie z prędkością $\dfrac{1}{x}$ kilometrów na minutę, czyli $\dfrac{60}{x}$ kilometrów na godzinę. Wobec tego $\frac{60}{x}=x$, skąd obliczamy $x=\sqrt{60}$.

a) Liczba $\sqrt{60}=2\sqrt{15}$ jest niewymierna.

b) Zachodzi nierówność $\sqrt{60}<\sqrt{64}=8$, więc Antek biegnie z prędkością mniejszą od 8 km/h.

c) Gdyby Antek szedł dwa razy wolniej, przebycie tej samej trasy zajęłoby mu dwukrotnie więcej czasu.

Liczby wymierne i niewymierne

23. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{N}}$ a) obie liczby a i b są niewymierne;

$\boxed{\text{N}}$ b) co najmniej jedna z liczb a, b jest wymierna;

$\boxed{\text{T}}$ c) co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

Wyjaśnienie

a) Jeżeli $a=\sqrt{6}$ i $b=-2$, to

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=\sqrt{12}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$$

jest liczbą wymierną, a jedna z liczb a, b jest wymierna.

b) Jeżeli $a=\sqrt{2}$ i $b=\sqrt{3}$, to

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=2+3=5$$

jest liczbą wymierną, a żadna z liczb a, b nie jest wymierna.

c) Załóżmy, że obydwie liczby a i b są wymierne. Przyjmijmy oznaczenie $c=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$; z warunków zadania wynika więc, że c jest liczbą wymierną. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^2&=c^2,\\ 2a^2+2ab\sqrt{6}+3b^2&=c^2,\\ 2ab\sqrt{6}&=c^2-2a^2-3b^2\,.\end{aligned}$$

Ponieważ obie liczby a i b są różne od 0, więc $ab\neq 0$. Wobec tego

$$\sqrt{6}=\frac{c^2-2a^2-3b^2}{2ab}\,.$$

Zarówno licznik, jak i mianownik ułamka stojącego po prawej stronie ostatniej równości są liczbami wymiernymi, więc cały ułamek jest liczbą wymierną. Tymczasem lewa strona ostatniej równości, równa $\sqrt{6}$, jest liczbą niewymierną. Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a i b jest niewymierna.

---

24. Liczba $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}$ jest

$\boxed{\text{N}}$ a) niewymierna;

$\boxed{\text{N}}$ b) mniejsza od 2;

$\boxed{\text{N}}$ c) równa $\sqrt[n]{2}$ dla pewnej liczby całkowitej $n>1$.

Wyjaśnienie

Zauważmy, że

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[6]{2^6}=2\,.$$

---

25. Liczba $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}$ jest

N	a) całkowita;
T	b) niewymierna;
T	c) większa od $1,8$.

Wyjaśnienie

Oznaczmy daną liczbę przez a. Ponieważ $1-\sqrt{2}<0$, więc $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$. Wobec tego

$$a=\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{2}=|1-\sqrt{2}|+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-1\,.$$

a), b) Gdyby liczba a była wymierna, to również liczba $\frac{a+1}{2}=\sqrt{2}$ musiałaby być wymierna. Jednak liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, więc liczba a także musi być niewymierna.

c) Prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2}>\sqrt{1,96}=1,4$. Stąd wynika, że

$$a=2\sqrt{2}-1>2\cdot 1,4-1=1,8.$$

---

26. Liczba $\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

N	a) niewymierna;
T	b) całkowita;
T	c) większa od $\frac{2}{3}$.

Wyjaśnienie

Zauważmy, że

$$\frac{2}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(2+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})}+\frac{1\cdot(1+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=\frac{5+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}=1\,.$$

---

27. Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest

T	a) całkowita;
N	b) niewymierna;
N	c) dodatnia.

Wyjaśnienie

Zauważmy, że $3-2\sqrt{2}=2-2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2}-1)^2$. Liczba $\sqrt{2}-1$ jest dodatnia, więc $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. Stąd wynika, że

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1\,.$$

---

28. Liczba $\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[3]{27}}$ jest

N a) niewymierna;

T b) równa $\sqrt[3]{27}$;

T c) całkowita.

Wyjaśnienie

$\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[3]{27}}=\sqrt[3]{9\cdot 3}=\sqrt[3]{27}=3\,.$

---

29. Liczba $\sqrt{0,4444\ldots}$ jest

T a) wymierna;

N b) równa $0,2222\ldots$;

T c) większa od $0,5$.

Wyjaśnienie

Oznaczmy przez x liczbę $0,4444\ldots$. Wówczas

$$10x=10\cdot 0,4444\ldots=4,4444\ldots=4+0,4444\ldots=4+x\,.$$

Stąd wynika, że $9x=4$, wobec czego $x=\frac{4}{9}$, a zatem

$$\sqrt{0,4444\ldots}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}=0,6666\ldots\ .$$

---

30. Liczba $\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\cdot\frac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$ jest

T a) wymierna;

N b) większa od 1;

N c) równa $\sqrt{30}$.

Wyjaśnienie

$$\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}\cdot\frac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}\cdot\frac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=1\,.$$

---

31. Liczby wymierne a, b, c są różne i każdy z iloczynów $a\cdot b$, $b\cdot c$, $c\cdot a$ jest liczbą całkowitą. Wynika z tego, że

N a) co najmniej jedna z liczb a, b, c jest całkowita;

N b) co najmniej dwie z liczb a, b, c są całkowite;

N c) każda z liczb a, b, c jest całkowita.

Wyjaśnienie

Niech $a=\frac{3\cdot 5}{2}$, $b=\frac{5\cdot 2}{3}$, $c=\frac{2\cdot 3}{5}$. Liczby a, b, c są różne, wymierne i żadna z nich nie jest liczbą całkowitą. Tymczasem każdy z iloczynów $a\cdot b=25$, $b\cdot c=4$, $c\cdot a=9$ jest liczbą całkowitą.

---

32. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Wynika z tego, że

T a) liczba $x+y$ jest niewymierna;

N b) liczba $x\cdot y$ jest niewymierna;

N c) liczba $x+y+x\cdot y$ jest niewymierna.

Wyjaśnienie

a) Gdyby liczba $x+y$ była wymierna, to również liczba $y=(x+y)-x$ byłaby wymierna, jako różnica liczb wymiernych. Sprzeczność. Wobec tego liczba $x+y$ jest niewymierna.

b) Przyjmując $x=0$ oraz $y=\sqrt{2}$, uzyskujemy $x\cdot y=0$, co jest liczbą wymierną.

c) Przyjmując $x=-1$ oraz $y=\sqrt{2}$, uzyskujemy $x+y+x\cdot y=-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}=-1$, co jest liczbą wymierną.

---

33. Dane są takie liczby a, b, że $a>b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

T a) liczba $a-b$ jest wymierna;

N b) liczba ab jest wymierna;

N c) obie liczby a i b są wymierne.

Wyjaśnienie

a) Liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne, a zatem ich różnica

$$a(b+1)-b(a+1)=ab+a-ab-b=a-b$$

również jest liczbą wymierną.

b), c) Przyjmijmy $a=\sqrt{2}$ oraz $b=\sqrt{2}-1$. Wówczas $a>b$, a ponadto liczby $a(b+1)$ oraz $b(a+1)$ są wymierne, gdyż

$$a(b+1)=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1+1)=2\,,\qquad b(a+1)=(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)=2-1=1\,.$$

Jednak wtedy liczby a i b oraz liczba

$$ab=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

nie są wymierne.

---

34. Liczby a, b są dodatnie oraz liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ i $a-b$ są wymierne. Wynika z tego, że

T a) wymierna jest liczba $\sqrt{a}-\sqrt{b}$;

T b) wymierna jest każda z liczb $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$;

T c) wymierna jest liczba $a+b$.

Wyjaśnienie

a) Zauważmy, że dla dodatnich liczb a i b,

$$a-b=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}).$$

Wobec tego liczba

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych.

b) Oznaczmy $\sqrt{a}-\sqrt{b}=p$ oraz $\sqrt{a}+\sqrt{b}=q$. Dodając stronami ostatnie dwie równości, uzyskujemy $2\sqrt{a}=p+q$, czyli $\sqrt{a}=\frac{1}{2}(p+q)$. Wiemy, że liczby p i q są wymierne, a zatem suma $p+q$ jest również liczbą wymierną. Zatem wymierna jest także liczba $\frac{1}{2}(p+q)=\sqrt{a}$.

Ponieważ $\sqrt{b}=\sqrt{a}-p$ oraz liczby $\sqrt{a}$ i p są wymierne, więc wymierna jest także liczba $\sqrt{b}$.

c) Liczby $a=(\sqrt{a})^2$ oraz $b=(\sqrt{b})^2$ są wymierne, gdyż obie są kwadratami liczb wymiernych. Wobec tego liczba $a+b$ jest także wymierna.

---

35. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, że liczby a^2+b^2 oraz ab są wymierne. Wynika stąd, że wymierna jest liczba

T a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

T b) $(a+b)^2$;

N c) $a+b$.

Wyjaśnienie

a) Zauważmy, że

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Wobec tego liczba $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ jest wymiarna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych.

b) Liczby a^2+b^2 oraz $2ab$ są wymierne, a zatem ich suma $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ również jest liczbą wymierną.

c) Przyjmijmy $a=\sqrt{2}$ oraz $b=\sqrt{2}$. Wówczas liczby $a^2+b^2=2+2=4$ oraz $ab=2$ są wymierne, ale liczba $a+b=2\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

---

36. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

N a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;

N b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;

N c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.

Wyjaśnienie

Rozważmy kwadrat, którego przekątna d ma długość $\sqrt[4]{2}$. Liczba $\sqrt[4]{2}$ jest liczbą niewymierną. Ponadto pole rozważanego kwadratu jest równe

$$\frac{1}{2}d^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i jest to liczba niewymierna. Z kolei długość boku tego kwadratu wynosi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}d = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

i jest to także liczba niewymierna. Wreszcie obwód tego kwadratu to

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d = 2\sqrt{2}d = 2\sqrt[4]{8}$$

i ta liczba jest również niewymierna.

---

37. Liczba a^2 jest niewymierna. Wynika z tego, że liczba

T a) a jest niewymierna;

N b) a jest wymierna;

N c) a^4 jest wymierna.

Wyjaśnienie

a), b) Przypuśćmy, że liczba a jest wymierna. Wówczas liczba a^2, jako iloczyn dwóch liczb wymiernych, również jest wymierna. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że a jest liczbą niewymierną.

c) Przyjmijmy $a = \sqrt[8]{2}$. Wtedy obie liczby $a^2 = \sqrt[4]{2}$ oraz $a^4 = \sqrt{2}$ są niewymierne.

Liczby całkowite

38. Suma pewnych czterech różnych dodatnich liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{T}}$ a) co najmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta;

$\boxed{\text{T}}$ b) iloczyn tych liczb jest liczbą parzystą;

$\boxed{\text{N}}$ c) co najmniej dwie z tych liczb są parzyste.

Wyjaśnienie

a) Niech a, b, c, d będą danymi liczbami i przypuśćmy, że wszystkie one są parzyste. Wówczas liczba $a+b+c+d$ jest parzysta. Przeczy to jednak warunkom zadania. Stąd wniosek, że co najmniej jedna z liczb a, b, c, d musi być nieparzysta.

b) Jeśli wszystkie cztery dane liczby a, b, c, d są nieparzyste, to liczba $a+b+c+d$ jest parzysta. Przeczy to jednak warunkom zadania. Wobec tego co najmniej jedna z liczb a, b, c, d musi być parzysta. Zatem iloczyn $abcd$ jest liczbą parzystą.

c) Rozpatrzmy następujące cztery liczby: 1, 2, 3, 5. Ich suma jest równa 11 i jest to liczba nieparzysta. Jednak wśród rozpatrywanych czterech liczb jest tylko jedna parzysta: 2.

Uwaga

W powyższym rozumowaniu korzystaliśmy między innymi z tego, że suma czterech liczb parzystych jest liczbą parzystą. Oto uzasadnienie: Jeśli liczby a, b, c i d są parzyste, to $a=2k$, $b=2l$, $c=2m$ oraz $d=2n$, gdzie k, l, m i n są liczbami całkowitymi. Wtedy

$$a+b+c+d=2(k+l+m+n)\,.$$

Liczba $k+l+m+n$ jako suma liczb całkowitych jest całkowita, skąd wynika, że liczba $a+b+c+d$ jest parzysta.

Analogicznie możemy uzasadnić, że suma czterech liczb nieparzystych a, b, c, d jest liczbą parzystą: Przyjmując bowiem $a=2k+1$, $b=2l+1$, $c=2m+1$ oraz $d=2n+1$, gdzie k, l, m i n są liczbami całkowitymi, uzyskujemy

$$a+b+c+d=2(k+l+m+n+2)\,.$$

Liczba $k+l+m+n+2$ jako suma liczb całkowitych jest całkowita, a zatem liczba $a+b+c+d$ jest parzysta.

Podobnie rozumując stwierdzamy, że iloczyn czterech liczb całkowitych a, b, c, d, z których co najmniej jedna jest parzysta, jest liczbą parzystą. Dla dowodu przyjmijmy, że $a=2p$, gdzie p jest liczba całkowitą. Stąd $abcd=2(pbcd)$. Liczba $pbcd$ jako iloczyn liczb całkowitych jest liczbą całkowitą. Wobec tego liczba $abcd$ jest parzysta.

---

39. Istnieje 2011 takich różnych liczb pierwszych, że

$\boxed{\text{T}}$ a) ich suma jest liczbą nieparzystą;

$\boxed{\text{T}}$ b) ich suma jest liczbą parzystą;

$\boxed{\text{T}}$ c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.

Wyjaśnienie

a) Rozważmy 2011 dowolnych różnych, nieparzystych liczb pierwszych. Ich suma jest liczbą nieparzystą.

b), c) Rozważmy 2011 różnych liczb pierwszych, z których jedna jest równa 2. Ich iloczyn jest podzielny przez 2, czyli jest liczbą parzystą.

Wśród rozważanych liczb jest 2010 liczb nieparzystych. Ich suma jest liczbą parzystą. Po dodaniu liczby 2, suma wszystkich liczb w dalszym ciągu jest liczbą parzystą.

---

40. Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cifra liczby p jest równa

N a) 0 lub 7;

T b) 1 lub 3;

N c) 2 lub 5.

Wyjaśnienie

a) Każda liczba naturalna, której zapis zawiera tylko cyfry 0, 7 jest podzielna przez 7. Wobec tego każda liczba o tej własności i większa od 7 jest złożona.

c) Każda liczba naturalna zakończona cyfrą 2 jest parzysta, a każda liczba zakończona cyfrą 5 jest podzielna przez 5. Wobec tego liczba p składająca się tylko z cyfr 2, 5 jest podzielna przez 2 lub przez 5. Ponieważ $p > 13$, więc liczba p jest złożona.

b) Liczba $p = 31$ jest pierwsza i większa od 13.

---

41. Dodatnią liczbę całkowitą n zwiększono o 50%, a następnie wynik zmniejszono o 50%. W rezultacie otrzymano liczbę całkowitą m. Wynika z tego, że

N a) $m = n$;

T b) liczba n jest podzielna przez 4;

T c) liczba m jest podzielna przez 3.

Wyjaśnienie

b) Zwiększając liczbę n o 50%, uzyskujemy liczbę $n + \frac{50}{100}n = \frac{3}{2}n$. Z kolei zmniejszając liczbę $\frac{3}{2}n$ o 50%, otrzymujemy liczbę $\frac{3}{2}n - \frac{50}{100} \cdot \frac{3}{2}n = \frac{3}{4}n$. Wobec tego $m = \frac{3}{4}n$, czyli $4m = 3n$. Zatem liczba $3n$ jest podzielna przez 4, a skoro liczby 3 i 4 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1), więc liczba n jest podzielna przez 4.

c) Z uzyskanej wyżej równości $4m = 3n$ wynika, że liczba $4m$ jest podzielna przez 3. Ponieważ liczby 4 i 3 są względnie pierwsze, więc liczba m jest podzielna przez 3.

a) Różne liczby $m = 3$ i $n = 4$ spełniają warunki zadania.

---

42. Liczby całkowite a, b, c są dodatnie. Każda z nich daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Wynika z tego, że

T a) liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 3;

T b) suma cyfr liczby $a + b + c$ jest podzielna przez 3;

T c) liczby $a + b$ oraz c są różne.

Wyjaśnienie

a) Z warunków zadania wynika, że istnieją takie liczby całkowite k, l, m, że

$$a=3k+1, \quad b=3l+1, \quad c=3m+1.$$

Wobec tego $a+b+c=3(k+l+m+1)$. Liczba $k+l+m+1$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3.

b) Wykazaliśmy wyżej, że liczba $a+b+c$ jest podzielna przez 3. Zatem na mocy cechy podzielności przez 3, suma cyfr liczby $a+b+c$ jest także podzielna przez 3.

c) Zauważmy, że $a+b=3(k+l)+2$. Stąd wynika, że liczba $a+b$ z dzielenia przez 3 daje resztę 2, podczas gdy liczba c z dzielenia przez 3 daje resztę 1. Wobec tego liczby $a+b$ i c nie mogą być równe.

---

43. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że

N a) każda z liczb x i y jest podzielna przez 3;

N b) liczba x^2+y^2 jest podzielna przez 3;

T c) liczba x^2-y^2 jest podzielna przez 3.

Wyjaśnienie

a), b) Przyjmijmy $x=1$ oraz $y=2$. Wówczas liczba $x+y=3$ jest podzielna przez 3. Jednak wtedy żadna z liczb x, y oraz $x^2+y^2=5$ nie jest podzielna przez 3.

c) Zauważmy, że $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Pierwszy czynnik tego iloczynu jest liczbą podzielną przez 3. Stąd wynika, że liczba x^2-y^2 jest podzielna przez 3.

---

44. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których

T a) różnica jest podzielna przez 4;

N b) suma jest podzielna przez 4;

N c) iloczyn jest podzielny przez 4.

Wyjaśnienie

a) Każda liczba całkowita daje z dzielenia przez 4 jedną z czterech reszt: 0, 1, 2 lub 3. Wobec tego wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją co najmniej dwie takie a i b, które dają taką samą resztę z dzielenia przez 4. Oznacza to, że $a=4k+r$ oraz $b=4l+r$, gdzie k i l są liczbami całkowitymi, a liczba r jest równa 0, 1, 2, 3 lub 4. Wobec tego $k-l=4(k-l)$. Liczba $k-l$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a-b$ jest podzielna przez 4.

b) Rozpatrzmy pięć różnych liczb całkowitych, z których każda daje resztę 1 z dzielenia przez 4 (np. 1, 5, 9, 13, 17). Suma każdych dwóch z nich daje resztę 2 z dzielenia przez 4, a więc nie jest liczbą podzielną przez 4.

c) Rozpatrzmy pięć różnych nieparzystych liczb całkowitych (np. 1, 3, 5, 7, 9). Zauważmy, że iloczyn dowolnych dwóch z nich jest liczbą nieparzystą, czyli nie jest podzielny przez 4.

---

45. Dane są takie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $ab+bc+cd+da$ jest podzielna przez 5. Wynika z tego, że podzielna przez 5 jest co najmniej jedna z liczb

$\boxed{\text{N}}$ a) $a+b$, $c+d$;

$\boxed{\text{T}}$ b) $a+c$, $b+d$;

$\boxed{\text{N}}$ c) $a+d$, $b+c$.

Wyjaśnienie

b) Zauważmy, że $ab+bc+cd+da=(a+c)b+(a+c)d=(a+c)(b+d)$. Zatem iloczyn

$$(a+c)(b+d)$$

jest liczbą podzielną przez 5, a liczba 5 jest liczbą pierwszą. Wobec tego jeden z czynników $a+c$ lub $b+d$ musi być podzielny przez 5.

a) Przyjmijmy $a=2$, $b=1$, $c=3$ oraz $d=0$. Wówczas liczba $ab+bc+cd+da=5$ jest podzielna przez 5. Jednak wtedy żadna z liczb $a+b=3$ i $c+d=3$ nie jest podzielna przez 5.

c) Dla $a=2$, $b=1$, $c=3$ oraz $d=0$, żadna z liczb $a+d=2$ oraz $b+c=4$ nie jest podzielna przez 5.

---

46. Dodatnia liczba całkowita n jest podzielna przez każdą z następujących dziewięciu liczb: $1,2,3,\ldots,9$. Wynika z tego, że liczba n jest

$\boxed{\text{T}}$ a) podzielna przez 10;

$\boxed{\text{N}}$ b) podzielna przez 27;

$\boxed{\text{N}}$ c) większa lub równa $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9$.

Wyjaśnienie

b), c) Zauważmy, że liczba $n=5\cdot7\cdot8\cdot9$ jest podzielna przez każdą z liczb $1, 2, 3, \ldots, 9$. Jednak liczba ta nie jest podzielna przez 27, gdyż w jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 3 występuje w potędze 2. Liczba n jest także mniejsza od $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9$.

a) Liczba n jest podzielna przez 2 i przez 5, więc jest także podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 2 i 5, czyli przez 10.

---

47. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez

$\boxed{\text{N}}$ a) 3;

$\boxed{\text{T}}$ b) 5;

$\boxed{\text{T}}$ c) 7.

Wyjaśnienie

a) Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba o sumie cyfr 2, która jest podzielna przez 3.

b) Liczba 20 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 5.

c) Liczba 1001 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 7 $(1001=7\cdot11\cdot13)$.

---

48. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

T a) 4;

T b) 5;

N c) 6.

Wyjaśnienie

a), b) Niech a będzie liczbą, której pierwsze 2012 cyfr to 1, a cyfry dziesiątek i jedności są równe 0. Liczba a jest podzielna przez 4, gdyż jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Liczba a jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnia cyfra to 0.

c) Ponieważ $6=2\cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba naturalna jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. Liczba 2012 nie jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 2012 nie może być podzielna przez 3. Tym bardziej więc liczba ta nie może być podzielna przez 6.

---

49. Istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n, aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby

N a) 3;

T b) 5;

T c) 7.

Wyjaśnienie

a) Jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba 2^n nie jest podzielna przez 3. Wobec tego także suma cyfr zapisu dziesiętnego liczby 2^n nie jest podzielna przez 3. Tymczasem liczba będąca dodatnią całkowitą potęgą liczby 3 jest podzielna przez 3, a więc suma cyfr jej zapisu dziesiętnego jest liczbą podzielną przez 3.

b) Dla $n=9$ cyfry liczby $2^n=512$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $125=5^3$.

c) Dla $n=10$ cyfry liczby $2^n=1024$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $2401=7^4$.

---

50. Dane są takie liczby całkowite a i b, że liczby $a+b$ i $a-b$ są podzielne przez 12. Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

T a) 2;

T b) 3;

N c) 4.

Wyjaśnienie

a), b) Skoro obie liczby $a+b$ i $a-b$ są podzielne przez 12, to ich suma oraz różnica mają również tę własność. Stąd wynika, że liczby $2a$ i $2b$ są podzielne przez 12, a zatem istnieją takie liczby całkowite k i l, że $2a=12k$ oraz $2b=12l$. Wobec tego $a=6k$, $b=6l$, więc liczby a i b są podzielne zarówno przez 2 jak i przez 3.

c) Przyjmijmy $a=6$ oraz $b=6$. Wówczas liczby $a+b=12$ i $a-b=0$ są podzielne przez 12. Jednak wtedy żadna z liczb a i b nie jest podzielna przez 4.

51. Liczba całkowita a jest podzielna przez 6, a liczba całkowita b jest podzielna przez 10. Wynika z tego, że liczba

N a) $a+b$ jest podzielna przez 16;

T b) $a \cdot b$ jest podzielna przez 60;

T c) $5a+3b$ jest podzielna przez 15.

Wyjaśnienie

Ponieważ liczba a jest podzielna przez 6, więc $a=6k$ dla pewnej liczby całkowitej k. Podobnie, skoro b jest liczbą podzielną przez 10, to $b=10\ell$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ.

b) Mamy $a \cdot b = 6k \cdot 10\ell = 60 \cdot k\ell$. Ponieważ liczba $k\ell$ jest całkowita, więc z ostatniej równości wynika, że liczba $a \cdot b$ dzieli się przez 60.

c) Mamy $5a+3b = 5 \cdot 6k + 3 \cdot 10\ell = 15 \cdot 2(k+\ell)$. Liczba $2(k+\ell)$ jest całkowita, więc z ostatniej zależności wynika, że liczba $5a+3b$ dzieli się przez 15.

a) Przyjmimy $a=6$ oraz $b=0$. Wtedy a jest liczbą podzielną przez 6, a b — liczbą podzielną przez 10. Jednak liczba $a+b=6$ nie jest podzielna przez 16.

---

52. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a. Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

T a) 10;

T b) 13;

N c) 30.

Wyjaśnienie

a) Zwiększając liczbę d o 30%, uzyskujemy liczbę $d+\frac{30}{100}d=\frac{13}{10}d$, która jest całkowita. Oznaczmy tę liczbę przez l. Wówczas $\frac{13}{10}d=l$, czyli $13d=10l$, a zatem 10 jest dzielnikiem liczby $13d$. Liczby 13 i 10 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1). Wobec tego 10 jest dzielnikiem liczby d. Ponieważ d jest dzielnikiem liczby a, więc wynika stąd, że 10 jest dzielnikiem liczby a.

b) Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę $\frac{13}{10}d$, która jest dzielnikiem liczby a. Wobec tego istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $a=\frac{13}{10}dk$. Mnożąc ostatnią zależność stronami przez 10, uzyskujemy $10a=13dk$. Stąd wniosek, że 13 jest dzielnikiem liczby $10a$. Ponieważ liczba 13 jest pierwsza, więc jest ona dzielnikiem liczby 10 lub liczby a. Pierwszy z tych przypadków nie jest spełniony. Wobec tego 13 jest dzielnikiem liczby a.

c) Przyjmijmy $a=130$ oraz $d=10$. Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę 13, będącą dzielnikiem liczby 130. Jednocześnie liczba 130 nie jest podzielna przez 30.

---

53. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

N a) 2;

T b) 3;

N c) 5.

Wyjaśnienie

a), c) Niech a będzie liczbą, której wszystkie 30 cyfr to 1. Liczba a nie jest podzielna przez 2, gdyż jej ostatnia cyfra jest nieparzysta. Liczba a nie jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnią cyfrą nie jest 0 ani 5.

b) Liczba 30 jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 30 jest podzielna przez 3.

---

54. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n. Wynika z tego, że

N a) każda cyfra liczby n jest równa 1;

T b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy od 2;

N c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr liczby n.

Wyjaśnienie

a) Jeżeli $n=20$, to liczba n ma dwie cyfry i sumę cyfr równą 2.

c) Jeżeli $n=1000000009$, to suma cyfr i liczba cyfr liczby n są równe (obie wynoszą 10). Tymczasem suma cyfr liczby $n+1=1000000010$ jest równa 2, a zatem jest mniejsza od sumy cyfr liczby n.

b) Jeżeli pewna cyfra liczby n jest równa 0, to iloczyn cyfr liczby n jest także równy 0, a więc w szczególności jest on mniejszy od 2. W przeciwnym przypadku każda cyfra liczby n jest dodatnia. Wtedy z warunku, że suma cyfr liczby n jest równa liczbie jej cyfr wynika, że wszystkie cyfry liczby n równe są 1. Wówczas jednak także iloczyn cyfr takiej liczby jest mniejszy od 2.

---

55. Liczba $\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ trójek}}$ jest podzielna przez 99. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna

T a) przez 3;

T b) przez 6;

N c) przez 9.

Wyjaśnienie

Przyjmijmy oznaczenie $A_n = \underbrace{33\ldots3}_{n\text{ trójek}}$.

a) Liczba A_n jest podzielna przez 99, więc jest również liczbą podzielną przez 9. To oznacza, że suma cyfr liczby A_n — równa $3n$ — jest liczbą podzielną przez 9. Stąd wynika, że n jest liczbą podzielną przez 3.

b) Ponieważ $6=2\cdot3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 jest równy 1, więc wykorzystując podpunkt a), wystarczy dowieść, że liczba n jest parzysta.

Przypuśćmy, że liczba n jest nieparzysta. Wówczas liczba

$$A_n = \underbrace{33\ldots3}_{n-1\text{ cyfr}}0+3 = 33\cdot\underbrace{1010\ldots10}_{n-1\text{ cyfr}}+3$$

daje resztę 3 z dzielenia przez 33. Nie jest więc podzielna przez 33, a tym bardziej przez 99. Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba n jest parzysta.

c) Zauważmy, że $A_6 = 333333 = 99 \cdot 3367$, a 6 nie jest liczbą podzielną przez 9.

Uwaga

Można dowieść, że A_n jest liczbą podzielną przez 99 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

---

56. Liczby a i b są całkowite. Wynika z tego, że liczba $2a(a+1)(a+2)+3b(b+1)$ jest podzielna przez

N a) 4;

N b) 5;

T c) 6.

Wyjaśnienie

a), b) Przyjmijmy $a=0$, $b=1$. Wówczas liczba $2a(a+1)(a+2)+3b(b+1)=0+6=6$ nie jest podzielna przez 4 oraz nie jest podzielna przez 5.

c) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba całkowita jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

Liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 3. Ponadto, jedna spośród dwóch kolejnych liczb całkowitych b, $b+1$ jest parzysta. Wobec tego liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 2. Stąd wynika, że jest ona podzielna przez 6.

Liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 2. Ponadto, wśród trzech kolejnych liczb całkowitych a, $a+1$, $a+2$ jest jedna podzielna przez 3. Wobec tego liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 3. A zatem jest ona podzielna przez 6.

Skoro obie liczby $2a(a+1)(a+2)$ oraz $3b(b+1)$ są podzielne przez 6, to ich suma również ma tę własność.

---

57. Liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez

T a) 8^8;

N b) 10^{10};

N c) 18^{18}.

Wyjaśnienie

a) Zauważmy, że $12^{12} = (2^2 \cdot 3)^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$ oraz $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$. Wobec tego liczba 12^{12} jest podzielna przez 8^8, a więc również liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez 8^8.

b) Liczba 10^{10} jest podzielna przez 5, a iloczyn $6^6 \cdot 12^{12}$ — nie jest.

c) Obie liczby 18^{18} oraz $6^6 \cdot 12^{12}$ rozkładamy na czynniki pierwsze:

$$18^{18} = (2 \cdot 3^2)^{18} = 2^{18} \cdot 3^{36},$$

$$6^6 \cdot 12^{12} = (2 \cdot 3)^6 \cdot (2^2 \cdot 3)^{12} = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{24} \cdot 3^{12} = 2^{30} \cdot 3^{18}.$$

Widzimy stąd, że 18^{18} jest liczbą podzielną przez 3^{36}, a $6^6 \cdot 12^{12}$ — nie. Wobec tego $6^6 \cdot 12^{12}$ nie może być wielokrotnością liczby 18^{18}.

---

58. Liczba $9^{16}-16^9$ jest podzielna przez

N	a) 4;
T	b) 5;
T	c) $3^{16}-4^9$.

Wyjaśnienie

a) Liczba 9^{16} jest nieparzysta, a liczba 16^9 jest parzysta. Wobec tego różnica $9^{16}-16^9$ jest liczbą nieparzystą, więc nie jest podzielna przez 4.

b) Ostatnią cyfrą liczby $9^{16}=81^8$ jest 1, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 1 są zakończone cyfrą 1. Podobnie, ostatnią cyfrą liczby 16^9 jest 6, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 6 są zakończone cyfrą 6. W związku z tym ostatnią cyfrą różnicy $9^{16}-16^9$ jest 5, więc różnica ta jest podzielna przez 5.

c) Zauważmy, że dana liczba jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich, wobec czego możemy ją przedstawić następująco

$$9^{16}-16^9=(3^{16})^2-(4^9)^2=(3^{16}-4^9)(3^{16}+4^9).$$

W takim razie omawiana różnica jest liczbą podzielną przez $3^{16}-4^9$.

---

59. Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest

T	a) podzielna przez 5;
N	b) podzielna przez 9;
N	c) liczbą pierwszą.

Wyjaśnienie

a) Ostatnią cyfrą liczby 123465 jest 5, więc jest to liczba podzielna przez 5.

b) Dowolna liczba n, której cyframi są 1, 2, 3, 4, 5, 6 w pewnej kolejności, ma sumę cyfr równą $1+2+3+4+5+6=21$. Liczba 21 nie jest podzielna przez 9, więc korzystając z cechy podzielności przez 9, wnosimy, że liczba n również nie może być podzielna przez 9.

c) Każda liczba sześciocyfrowa składająca się z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 ma sumę cyfr równą 21. Liczba 21 jest podzielna przez 3, więc liczba sześciocyfrowa o sumie cyfr równej 21 również jest podzielna przez 3. Taka liczba, jako większa od 3, nie może być liczbą pierwszą.

---

60. Iloczyn $a\cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

T	a) 5;
N	b) 8;
N	c) 10.

Wyjaśnienie

a) Gdyby żadna z liczb a, b nie była podzielna przez 5, iloczyn $a{\cdot}b$ tych liczb również nie mógłby być podzielny przez 5, a tym bardziej przez 400.

b) Jeżeli $a=4$, $b=100$, to $a{\cdot}b=400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez 8.

c) Jeżeli $a=16$, $b=25$, to $a{\cdot}b=400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a, b nie jest podzielna przez 10.

---

61. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

N a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2;

T b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2;

T c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

Wyjaśnienie

a) Jeżeli na tablicy znajduje się siedem liczb nieparzystych, to suma każdych trzech spośród nich jest liczbą nieparzystą.

b) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej cztery liczby parzyste lub co najmniej cztery liczby nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby zarówno liczb parzystych, jak i nieparzystych było co najwyżej trzy, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma czterech liczb parzystych oraz suma czterech liczb nieparzystych są liczbami parzystymi.

c) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej trzy liczby dające tę samą resztę przy dzieleniu przez 3. Rzeczywiście, gdyby każdą z trzech możliwych reszt dawały co najwyżej dwie liczby, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma trzech liczb dających tę samą resztę przy dzieleniu przez 3 jest podzielna przez 3.

---

62. Liczba dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest równa

N a) 2^{1009};

T b) 2^{2017};

T c) $\left(-\sqrt{2}\right)^{4034}$.

Wyjaśnienie

a), b) Ponieważ liczba 2^{2018} jest parzysta, więc wśród liczb $1,2,3,\ldots,2^{2018}$ jest dokładnie tyle samo liczb parzystych co nieparzystych. Wobec tego dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest $\frac{1}{2}\cdot 2^{2018}=2^{2017}$.

c) Mamy $(-\sqrt{2})^{4034}=(-1)^{4034}\cdot(\sqrt{2})^{4034}=2^{2017}$.

---

63. Istnieją takie różne liczby pierwsze p, q, że liczba

T a) $pq+1$ jest liczbą pierwszą;

T b) $pq+1$ jest liczbą złożoną;

T c) $p+q$ jest liczbą pierwszą.

Wyjaśnienie

a) Dla $p=2$ i $q=3$ liczba $pq+1=7$ jest pierwsza.
b) Dla $p=3$ i $q=5$, liczba $pq+1=16$ jest złożona.
c) Dla $p=2$ i $q=3$ liczba $p+q=5$ jest pierwsza.

Uwaga

Powyższe liczby p i q nie są jedynymi przykładami potwierdzającymi słuszność stwierdzeń a), b) i c). Zauważmy jednak, że aby znaleźć prawidłowe przykłady świadczące o prawdziwości zdań a) i c), jedna z liczb p lub q musi być równa 2. W przeciwnym przypadku, liczby p i q — jako liczby pierwsze różne od 2 — byłyby nieparzyste. Wtedy liczby $pq+1$ oraz $p+q$ byłyby parzyste, a więc nie mogłyby być liczbami pierwszymi.

---

64. Liczba naturalna a jest dwucyfrowa, a liczba naturalna b jest trzycyfrowa. Wynika z tego, że

N a) suma $a+b$ jest liczbą trzycyfrową;

N b) iloczyn $a\cdot b$ jest liczbą czterocyfrową;

N c) suma $a+b$ ma mniej cyfr niż iloczyn $a\cdot b$.

Wyjaśnienie

a), b) Jeżeli $a=20$ oraz $b=990$, to $a+b=1010$ jest liczbą czterocyfrową, a $a\cdot b=19800$ jest liczbą pięciocyfrową.

c) Jeżeli $a=10$ oraz $b=990$, to obie liczby $a+b=1000$ oraz $a\cdot b=9900$ są czterocyfrowe.

---

65. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Wynika z tego, że

T a) liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej;

N b) liczba n jest iloczynem co najmniej dwóch różnych liczb pierwszych;

N c) liczba n^2 ma dokładnie sześć różnych dodatnich dzielników.

Wyjaśnienie

b) Przypuśćmy, że liczba n ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p i q. Wówczas jej dzielnikami są co najmniej cztery różne liczby dodatnie 1, p, q oraz pq, co przeczy założeniom.

a) Wykazaliśmy przed chwilą, że liczba n ma co najwyżej jeden dzielnik pierwszy, czyli jest równa p^k, dla pewnej liczby pierwszej p oraz pewnej nieujemnej liczby całkowitej k. Liczba takiej postaci ma dokładnie $k+1$ różnych dzielników dodatnich: $1,p,p^2,\ldots,p^k$. Ponieważ liczba n ma trzy różne dodatnie dzielniki, więc $k+1=3$, czyli $k=2$. Stąd wynika, że $n=p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p.

c) Skoro $n=p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p, to $n^2=p^4$. Wobec tego liczba n^2 ma dokładnie pięć różnych dodatnich dzielników: 1, p, p^2, p^3 oraz p^4.

Uwaga

Jeśli $p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{k_l}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze (liczby $p_1,p_2,\ldots,p_l$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $k_1,k_2,\ldots,k_l$ dodatnimi liczbami całkowitymi), to liczba dzielników liczby n jest równa $(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_n+1)$.

---

66. Dodatnie liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Ponadto liczba $a\cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

T a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;

T b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a+b$ jest równy 1;

N c) liczba $a+b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Wyjaśnienie

a) Dodatnia liczba całkowita jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze.

Niech liczba pierwsza p będzie dzielnikiem liczby a. Wówczas liczba p jest także dzielnikiem liczby $a\cdot b$. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, więc liczba p nie jest dzielnikiem liczby b. Wobec tego liczba p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a w takiej samej potędze, jak w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a\cdot b$. Jednak w rozkładzie liczby $a\cdot b$ na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potędze, gdyż liczba $a\cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

b) Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a+b$. Ponieważ $d\mid a$ oraz $d\mid a+b$, więc liczba d jest również dzielnikiem różnicy tych liczb równej $(a+b)-a=b$. Wobec tego $d\mid a$ oraz $d\mid b$, a skoro największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, to wynika stąd, że $d=1$.

c) Przyjmijmy $a=4$ oraz $b=9$. Liczby a i b spełniają wówczas warunki zadania, ale liczba $a+b=13$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

---

67. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wynika z tego, że w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych można przedstawić także liczbę

T a) $2n$;

N b) $3n$;

T c) $4n$.

Wyjaśnienie

Z warunków zadania wynika, że istnieją takie liczby całkowite a i b, że $n=a^2+b^2$.

c) Zauważmy, że $4n=4a^2+4b^2=(2a)^2+(2b)^2$ oraz liczby $2a$ i $2b$ są całkowite.

a) Zauważmy, że

$$2n=2a^2+2b^2=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$$

oraz liczby $a+b$ i $a-b$ są całkowite.

b) Liczba $n=1=1^2+0^2$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, ale liczba $3n=3$ nie da się przedstawić w tej postaci.

Uwagi

1. Można udowodnić, że jeżeli różną od zera liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, to liczby $3n$ nie można przedstawić w takiej postaci.

2. Zależności wyprowadzone w podpunktach c) i a) są szczególnymi przypadkami tzw. *tożsamości Diofantosa*. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule „Tożsamość Diofantosa", *Kwadrat* nr 2 (grudzień 2011).

---

68. Istnieje taka liczba całkowita n, że dwiema ostatnimi cyframi liczby n^2 są

T a) 44;

N b) 55;

N c) 66.

Wyjaśnienie

a) Przyjmijmy $n=12$. Wtedy $n^2=144$.

b) Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita n, że n^2 kończy się cyframi 55. Wówczas liczba n jest nieparzysta oraz podzielna przez 5. W związku z tym liczba n^2 jest nieparzysta i podzielna przez 25. Jednak każda liczba nieparzysta podzielna przez 25 kończy się cyframi 25 lub 75.

c) Liczba, której dwiema ostatnimi cyframi są 66 jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Taka liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

---

69. Każde dwie spośród trzech dodatnich liczb całkowitych a, b, c są różne. Ponadto liczby te spełniają zależności $\mathrm{NWD}(a,b)=1$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c)=1$. Wynika z tego, że

N a) $\mathrm{NWD}(b,c)=1$;

N b) $\mathrm{NWD}(a,b+c)=1$;

T c) $\mathrm{NWD}(a,bc)=1$.

Wyjaśnienie

a), b) Jeżeli $a=2$, $b=3$, $c=9$, to $\mathrm{NWD}(a,b)=1$ oraz $\mathrm{NWD}(a,c)=1$, a przy tym

$$\mathrm{NWD}(b,c)=\mathrm{NWD}(3,9)=3\neq 1 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWD}(a,b+c)=\mathrm{NWD}(2,12)=2\neq 1.$$

c) Przypuśćmy, że $\mathrm{NWD}(a,bc)>1$. Oznacza to, że liczby a oraz bc mają wspólny dzielnik większy od 1. Wobec tego istnieje pewien wspólny dzielnik pierwszy p liczb a oraz bc. Skoro p dzieli iloczyn bc, to dzieli co najmniej jeden z czynników b, c. Jedna z par (a,b), (a,c) ma więc wspólny dzielnik większy od 1, czyli $\mathrm{NWD}(a,b)\neq 1$ lub $\mathrm{NWD}(a,c)\neq 1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\mathrm{NWD}(a,bc)=1$.

---

70. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy 4^{100}. Wynika z tego, że

N a) liczba n jest parzysta;

N b) liczba n ma co najmniej 100 cyfr;

T c) suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od 400.

Wyjaśnienie

a) Liczba $n = \underbrace{444\ldots4}_{100 \text{ cyfr } 4}1$ jest nieparzysta, a jej iloczyn cyfr jest równy 4^{100}.

b) Liczba $n = \underbrace{888\ldots8}_{66 \text{ cyfr } 8}4$ ma 67 cyfr, a jej iloczyn cyfr jest równy

$$8^{66} \cdot 4 = 2^{3\cdot 66} \cdot 2^2 = 2^{198+2} = 2^{200} = 4^{100}.$$

c) Zauważmy, że jedynymi możliwymi cyframi liczby n są cyfry 1, 2, 4 i 8. Oznaczmy przez m_d liczbę wystąpień cyfry d w zapisie dziesiętnym liczby n. Z warunków zadania wynika wówczas, że

$$\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{m_1 \text{ cyfr } 1}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{m_2 \text{ cyfr } 2}\cdot\underbrace{4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 4}_{m_4 \text{ cyfr } 4}\cdot\underbrace{8\cdot 8\cdot\ldots\cdot 8}_{m_8 \text{ cyfr } 8} = 4^{100},$$

czyli równoważnie

$$\begin{aligned} 1^{m_1}\cdot 2^{m_2}\cdot 4^{m_4}\cdot 8^{m_8} &= 4^{100},\\ 2^{m_2}\cdot 2^{2m_4}\cdot 2^{3m_8} &= 2^{200},\\ 2^{m_2+2m_4+3m_8} &= 2^{200},\\ m_2+2m_4+3m_8 &= 200. \end{aligned}$$

Suma cyfr liczby n jest równa

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{m_1 \text{ cyfr } 1}+\underbrace{2+2+\ldots+2}_{m_2 \text{ cyfr } 2}+\underbrace{4+4+\ldots+4}_{m_4 \text{ cyfr } 4}+\underbrace{8+8+\ldots+8}_{m_8 \text{ cyfr } 8} = m_1+2m_2+4m_4+8m_8.$$

Możemy teraz zauważyć, że

$$m_1+2m_2+4m_4+8m_8 = m_1+2m_8+2\cdot(m_2+2m_4+3m_8) = m_1+2m_8+2\cdot 200 \geqslant 400,$$

gdyż $m_1 \geqslant 0$ oraz $m_8 \geqslant 0$.

---

71. Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ jest naturalna. Wynika z tego, że liczba n jest

N a) podzielna przez 2;

T b) podzielna przez 3;

T c) większa od $\sqrt{2014}$.

Wyjaśnienie

Oznaczmy $k=\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$. Przekształcając tę równość, otrzymujemy kolejno:

$$k^2=2+\sqrt{4+n},$$
$$k^2-2=\sqrt{4+n},$$
$$k^4-4k^2+4=4+n,$$
$$k^2(k^2-4)=n,$$
$$k^2(k-2)(k+2)=n.$$

b) Jeżeli k jest liczbą naturalną, to jedna z liczb $k-2$, k, $k+2$ jest podzielna przez 3. Rzeczywiście, jeżeli k daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k+2$ jest podzielna przez 3, a jeżeli k daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k-2$ jest podzielna przez 3. Stąd wniosek, że iloczyn $k^2(k-2)(k+2)$ jest liczbą podzielną przez 3 dla każdej liczby naturalnej k.

c) Liczba $n=k^2(k-2)(k+2)$ jest dodatnia, skąd wynika, że $k\geqslant 3$. Wobec tego

$$n=k^2(k-2)(k+2)\geqslant 3^2\cdot(3-2)(3+2)=45=\sqrt{2025}>\sqrt{2014}\,.$$

a) Dla liczby nieparzystej $n=45$ liczba

$$\sqrt{2+\sqrt{4+45}}=\sqrt{2+\sqrt{49}}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$$

jest naturalna.

---

72. Dodatnie liczby całkowite m, n spełniają warunek $m>n$. Wynika z tego, że

T a) $m\geqslant n+1$;

N b) $\sqrt{m}\geqslant\sqrt{n}+1$;

T c) $m^2\geqslant n^2+3$.

Wyjaśnienie

a) Jeśli dwie liczby całkowite są różne, to różnica między większą z nich a mniejszą wynosi co najmniej 1. Wobec tego $m-n\geqslant 1$, czyli $m\geqslant n+1$.

b) Przyjmując $m=2$ oraz $n=1$, otrzymujemy $\sqrt{m}=\sqrt{2}<2=\sqrt{n}+1$.

c) Uzasadnimy, że dana nierówność jest spełniona dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych m i n takich, że $m>n$. Podamy dwa sposoby tego uzasadnienia.

Sposób I

Obie strony nierówności $m\geqslant n+1$ są dodatnie, a zatem możemy obie strony tej nierówności podnieść do kwadratu. Uzyskujemy wtedy $m^2\geqslant n^2+2n+1$.

Z kolei liczba n jest całkowita i dodatnia, a zatem $n\geqslant 1$.

Wobec tego $m^2\geqslant n^2+2n+1\geqslant n^2+3$.

Sposób II

Wiemy, że $n\geqslant 1$, więc z nierówności $m\geqslant n+1$ uzyskujemy $m\geqslant 2$. Wobec tego $m+n\geqslant 3$. Stąd $m^2-n^2=(m+n)(m-n)\geqslant 3\cdot 1=3$.

Geometria płaska

73. Miary α, β, γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha+\beta<\gamma$. Wynika z tego, że

N a) trójkąt ten jest ostrokątny;

T b) trójkąt ten jest rozwartokątny;

N c) taki trójkąt nie istnieje.

Wyjaśnienie

Przekształcimy podaną nierówność równoważnie. Dodając do obu jej stron γ, otrzymujemy $\alpha+\beta+\gamma<2\gamma$. Suma kątów w trójkącie jest równa $180°$, a zatem $180°<2\gamma$. Stąd wniosek, że warunek dany w treści zadania jest równoważny zależności $90°<\gamma$, która oznacza, że trójkąt jest rozwartokątny.

---

74. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta oraz $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Wynika z tego, że jest to trójkąt

T a) równoramienny;

N b) równoboczny;

N c) ostrokątny.

Wyjaśnienie

a) Ponieważ $(a-b)(b-c)(c-a)=0$, więc $a-b=0$ lub $b-c=0$ lub $c-a=0$, zatem $a=b$ lub $b=c$ lub $c=a$. Wobec tego pewne dwa boki rozważanego trójkąta są równe, czyli jest on równoramienny.

b), c) Zauważmy, że boki dowolnego trójkąta rozwartokątnego równoramiennego spełniają podaną w treści zadania równość.

---

75. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że istnieje trójkąt o bokach długości

T a) $a+1$, $b+1$, $c+1$;

N b) a^2, b^2, c^2;

T c) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

Wyjaśnienie

Trójkąt o bokach x, y, z istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x+y>z, \quad y+z>x, \quad z+x>y.$$

a) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b>c$. Wobec tego

$$(a+1)+(b+1)=a+b+2>c+2>c+1.$$

W pełni analogicznie wykazujemy pozostałe dwie nierówności. Stąd wniosek, że istnieje trójkąt o bokach długości $a+1$, $b+1$, $c+1$.

c) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b>c$. A zatem

$$a+b+2\sqrt{ab}>a+b>c, \quad \text{skąd} \quad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2.$$

Wobec tego $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$. Pozostałe dwie nierówności wykazujemy analogicznie.

b) Trójkąt o bokach 2, 2, 3 istnieje, a trójkąt o bokach 2^2, 2^2, 3^2 nie, gdyż $2^2+2^2<3^2$.

---

76. Dodatnie liczby całkowite a, b, c są takie, że liczby 2^a, 2^b, 2^c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że

T a) jest to trójkąt ostrokątny;

T b) liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta;

T c) co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są równe.

Wyjaśnienie

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a\leqslant b\leqslant c$.

c) Przypuśćmy, że $b<c$, czyli $b+1\leqslant c$. Wówczas

$$2^a+2^b\leqslant 2^b+2^b=2^{b+1}\leqslant 2^c,$$

co przeczy nierówności trójkąta o bokach 2^a, 2^b, 2^c. To oznacza, że $b=c$.

b) Bezpośrednio sprawdzamy, że $a+b>b=c$, $b+c>b\geqslant a$, $c+a>c\geqslant a$, więc liczby a, b, c spełniają nierówność trójkąta.

a) Z poprzednich dwóch punktów wynika, że trójkąt o bokach 2^a, 2^b, 2^c jest równoramienny i długość ramienia jest w nim nie mniejsza od długości podstawy. Ponieważ w trójkącie naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt, więc wynika z tego, że kąt między ramionami jest nie większy od kąta między podstawą a ramieniem, a ten jest ostry w każdym trójkącie równoramiennym.

---

77. W trójkącie ABC wysokości AE i BF są równe. Wynika z tego, że

N a) wszystkie wysokości tego trójkąta są równe;

T b) kąty BAC i ABC są równe;

T c) środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

Wyjaśnienie

b) Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE$, a także $\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BF$. Wobec tego

$$\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BF.$$

Ponieważ $AE=BF$, więc $BC=AC$. Zatem kąty BAC i ABC są równe.

c) Wykazaliśmy wyżej, że $BC=AC$. Wynika z tego, że trójkąt ABC ma oś symetrii, przechodzącą przez wierzchołek C. Stąd wniosek, że środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

a) Zauważmy, że trójkąt prostokątny równoramienny, o kącie prostym przy wierzchołku C, spełnia warunki zadania, lecz nie wszystkie wysokości tego trójkąta są równe.

---

78. Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od 1. Wynika z tego, że

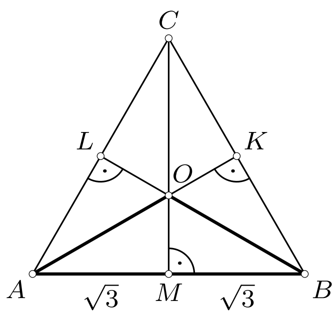
N a) trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od 1;

T b) każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od 1;

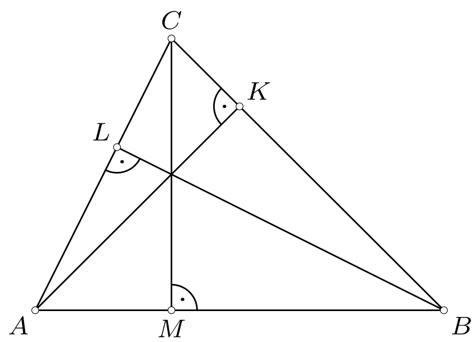
T c) pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

Wyjaśnienie

a) Rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku długości $2\sqrt{3}$ i oznaczmy przez O punkt przecięcia wysokości tego trójkąta, a przez K, L, M — środki odpowiednio boków BC, CA, AB (rys. 2).



rys. 2



rys. 3

W trójkącie ABO odcinki AL, BK, OM są wysokościami, przy czym

$$AL = BK = \sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad OM = \frac{CM}{3} = 1.$$

To oznacza, że dwie z wysokości trójkąta ABO mają długość większą od 1, a trzecia wysokość tego trójkąta ma długość równą 1 (czyli nie większą od 1).

b) Rozważmy dowolny trójkąt ABC spełniający warunki zadania i oznaczmy spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków A, B, C odpowiednio przez K, L, M (rys. 3). Przypuśćmy, że $BL > 1$ oraz $CM > 1$. Wówczas, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$AB^2 = AL^2 + BL^2 \geqslant BL^2, \quad \text{skąd} \quad AB \geqslant BL > 1.$$

Podobnie uzasadniamy, że

$$BC^2 = BL^2 + CL^2 \geqslant BL^2 \quad \text{oraz} \quad CA^2 = CM^2 + AM^2 \geqslant CM^2,$$

skąd $BC \geqslant BL > 1$ oraz $CA \geqslant CM > 1$. Wobec tego każdy bok trójkąta ABC ma długość większą od 1.

c) Przy oznaczeniach z rozwiązania poprzedniego podpunktu, wykorzystując nierówności $AB > 1$ oraz $CM > 1$, otrzymujemy

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM > \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

gdzie $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC.

79. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 40°$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle APB = 80°$. Wynika z tego, że

T a) każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od $40°$;

N b) trójkąt ABP jest ostrokątny;

N c) punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

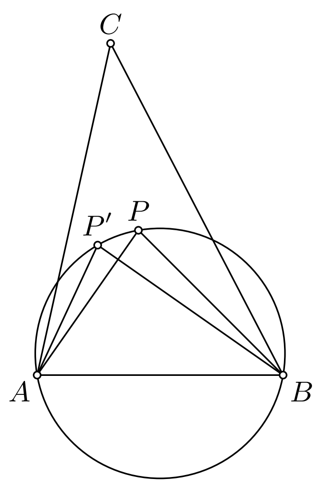
Wyjaśnienie

a) Suma kątów w czworokącie wklęsłym $APBC$ jest równa $360°$, więc

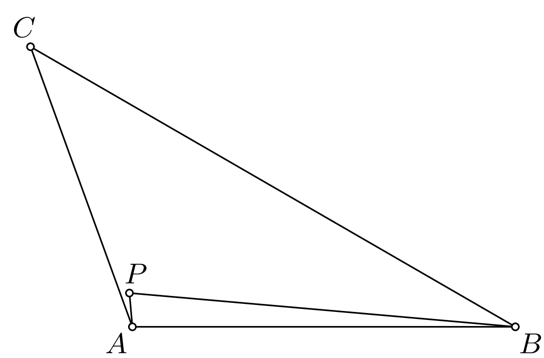
$$(360° - \sphericalangle APB) + \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 360°,$$

zatem $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = 80° - 40° = 40°$. Stąd wynika, że każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od $40°$.

c) Rozpatrzmy okrąg ω opisany na trójkącie ABP (rys. 4). Zauważmy, że dowolny punkt P', leżący na okręgu ω, wewnątrz trójkąta ABC, spełnia warunki zadania, gdyż $\sphericalangle AP'B = \sphericalangle APB = 80°$, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku.



rys. 4



rys. 5

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = 110°$ oraz $\sphericalangle ABC = 30°$ (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle ACB = 40°$. Wybierzmy punkt P leżący po tej samej stronie prostej AB, co punkt C, dla którego spełnione są równości:

$$\sphericalangle CAP = 15° \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBP = 25°.$$

Wówczas punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Podobnie jak w części a) wykazujemy, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 15° + 25° + 40° = 80°.$$

Ponadto $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAP = 110° - 15° = 95°$. Trójkąt ABP jest więc rozwartokątny.

---

80. Dany jest trójkąt ABC, w którym $BC = AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D. Wynika z tego, że kąt ADC jest

T a) równy $3 \cdot \sphericalangle DAC$;

N b) większy od kąta ACB;

N c) mniejszy od kąta BAC.

Wyjaśnienie

a) Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC, skąd wynika, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC$. Ponadto, $AC = BC$, a zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Ponieważ kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD, więc

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC + 2 \cdot \sphericalangle DAC = 3 \cdot \sphericalangle DAC\,.$$

c) Wykazaliśmy przed chwilą, że $\sphericalangle ADC = 3 \cdot \sphericalangle DAC$, podczas gdy $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Wobec tego kąt ADC jest większy od kąta BAC.

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120°$, $\sphericalangle CAB = 30°$ i $\sphericalangle ABC = 30°$. Wówczas $\sphericalangle DAC = 15°$, więc $\sphericalangle ADC = 3 \cdot 15° = 45°$, a zatem $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADC$.

---

81. Istnieje trójkąt, w którym różnica miar pewnych dwóch kątów wewnętrznych jest równa

T a) $90°$;

T b) $100°$;

N c) $200°$.

Wyjaśnienie

a) Trójkąt o kątach $30°, 30°, 120°$ ma zadaną własność, gdyż $120° - 30° = 90°$.

b) Trójkąt o kątach $20°, 40°, 120°$ ma zadaną własność, gdyż $120° - 20° = 100°$.

c) Gdyby istniał trójkąt o opisanej własności, to co najmniej jeden z jego kątów wewnętrzny miałby miarę większą od $200°$. Nie jest to jednak możliwe, gdyż każdy kąt wewnętrzny trójkąta ma miarę mniejszą od $180°$.

---

82. Trójkąt równoboczny można rozciąć na

T a) 4 trójkąty równoboczne;

T b) 6 trójkątów równobocznych;

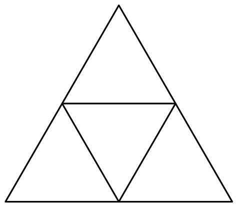
T c) 1000 trójkątów równobocznych.

Wyjaśnienie

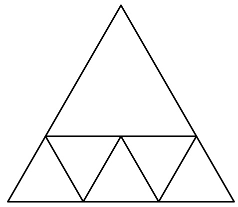
a) Trójkąt równoboczny można rozciąć na 4 trójkąty równoboczne wzdłuż odcinków łączących środki boków (rys. 6).

b) Trójkąt równoboczny o boku długości 3 można rozciąć na 5 trójkątów równobocznych o boku długości 1 oraz jeden trójkąt równoboczny o boku długości 2 — łącznie 6 trójkątów równobocznych (rys. 7).

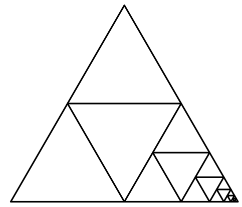
c) Zauważmy, że jedną z części uzyskanych w podziale z punktu a) można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne, tym samym otrzymując 3 dodatkowe kawałki. Następnie dowolny z tych kawałków można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne i otrzymać kolejne 3 części. Powtarzając tę czynność łącznie 332 razy, uzyskamy w końcu podział trójkąta równobocznego na $4 + 3 \cdot 332 = 1000$ trójkątów równobocznych (rys. 8).



rys. 6



rys. 7



rys. 8

83. Trójkąt T rozcięto wzdłuż odcinka na dwa trójkąty T_1 i T_2, a trójkąt S — na trójkąty S_1 i S_2. Okazało się, że trójkąt T_1 jest przystający do trójkąta S_1, a trójkąt T_2 jest przystający do trójkąta S_2. Wynika z tego, że trójkąty T i S

$\boxed{\text{T}}$ a) mają równe pola;

$\boxed{\text{N}}$ b) mają równe obwody;

$\boxed{\text{N}}$ c) są przystające.

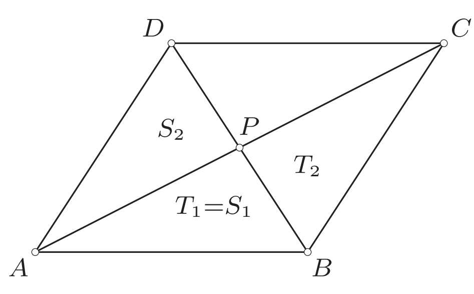
Wyjaśnienie

a) Pole trójkąta T jest równe sumie pól trójkątów T_1 i T_2, a pole trójkąta S jest równe sumie pól trójkątów S_1 i S_2. Figury przystające mają równe pola, więc pola trójkątów T_1 i S_1 są równe oraz pola trójkątów T_2 i S_2 są równe. Wobec tego również pola trójkątów T i S są równe.

b), c) Niech $ABCD$ będzie dowolnym równoległobokiem, w którym kąt ABC jest rozwarty. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD (rys. 9). Oznaczmy trójkąty ABC, ABP, BCP odpowiednio przez T, T_1, T_2, a trójkąty ABD, ABP, DAP odpowiednio przez S, S_1, S_2. Zauważmy, że wówczas trójkąty T_1 i S_1 są przystające (jest to ten sam trójkąt), a także trójkąty T_2 i S_2 są przystające (jeden jest obrazem drugiego w symetrii względem punktu P). Jednak

$$AB+BC+CA>AB+AD+DB\,,$$

co oznacza, że obwód trójkąta T jest większy od obwodu trójkąta S. Stąd wynika także, że trójkąty T i S nie są przystające.



rys. 9

84. Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości 3 oraz 4. Wynika z tego, że trzeci bok tego trójkąta ma długość

$\boxed{\text{N}}$ a) nie mniejszą od 5;

$\boxed{\text{T}}$ b) nie większą od 5;

$\boxed{\text{N}}$ c) równą 5.

Wyjaśnienie

Ponieważ przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest jednocześnie najdłuższym bokiem tego trójkąta, więc bok o długości 3 musi być jedną z przyprostokątnych. Stąd wniosek, że bok o długości 4 jest albo drugą przyprostokątną, albo przeciwprostokątną danego trójkąta.

W pierwszym przypadku, w myśl twierdzenia Pitagorasa, przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość

$$\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

Z kolei w drugim przypadku długość drugiej przyprostokątnej jest równa

$$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\sqrt{7}<\sqrt{25}=5$, skąd wynika, że w obu przypadkach trzeci bok rozważanego trójkąta ma długość nie większą od 5.

---

85. Dany jest taki trójkąt ABC, że $\sphericalangle ACB=30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R, a promień okręgu wpisanego jest równy r. Wynika z tego, że

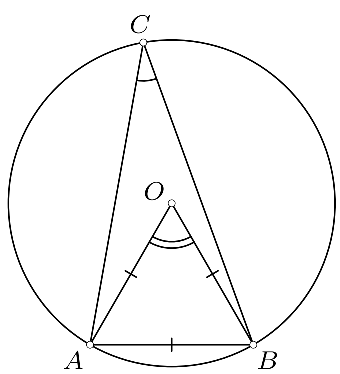
$\boxed{\text{T}}$ a) $AB=R$;

$\boxed{\text{N}}$ b) $r=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$;

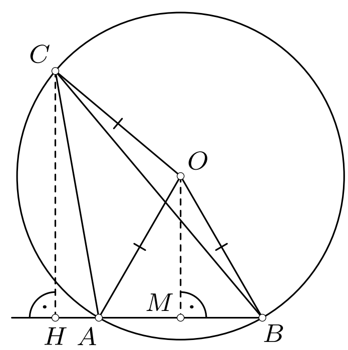
$\boxed{\text{T}}$ c) pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2.

Wyjaśnienie

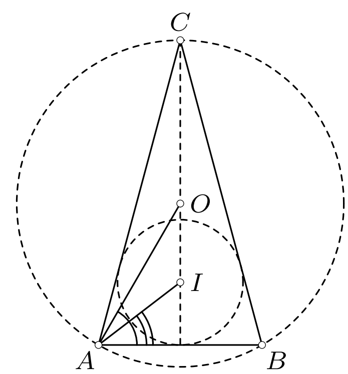
a) Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 10). Ponieważ $\sphericalangle AOB=2\cdot\sphericalangle ACB=2\cdot 30^\circ=60^\circ$ oraz $AO=BO=R$, więc trójkąt ABO jest równoboczny. Stąd wniosek, że $AB=R$.



rys. 10



rys. 11



rys. 12

c) Niech H będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C, a M spodkiem wysokości trójkąta równobocznego ABO, poprowadzonej z wierzchołka O (rys. 11). Wówczas

$$CH\leqslant CO+OM=R+\frac{R\sqrt{3}}{2}<2R.$$

Wobec tego, oznaczając przez S pole trójkąta ABC, uzyskujemy

$$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH<\frac{1}{2}\cdot R\cdot 2R=R^2.$$

b) Rozważmy trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 30°$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = 75°$ (rys. 12). Oznaczmy środek okręgu wpisanego w ten trójkąt przez I. Punkty O oraz I leżą na prostej prostopadłej do AB oraz

$$\sphericalangle BAO = 60° > 37.5° = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle BAI\,.$$

Wobec tego odległość punktu I od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu O od prostej AB, a zatem $r < \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

---

86. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 50°$. Wynika z tego, że

N a) $\sphericalangle AIB = 100°$;

T b) $\sphericalangle AIB > 110°$;

T c) $\sphericalangle AIB < 120°$.

Wyjaśnienie

Punkt I, jako środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC, jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych BAC oraz ABC trójkąta ABC (rys. 13). Stąd wniosek, że

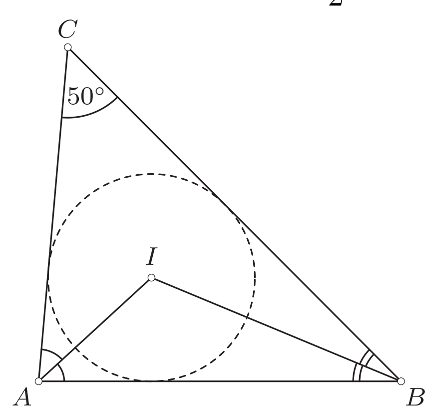
$$\sphericalangle BAI = \frac{\sphericalangle BAC}{2} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABI = \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180°, skąd

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle ACB = 130°.$$

Łącząc uzyskane równości, otrzymujemy

$$\sphericalangle AIB = 180° - \sphericalangle BAI - \sphericalangle ABI = 180° - \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2} = 180° - \frac{130°}{2} = 115°.$$



rys. 13

---

87. W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC. Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E. Wynika z tego, że

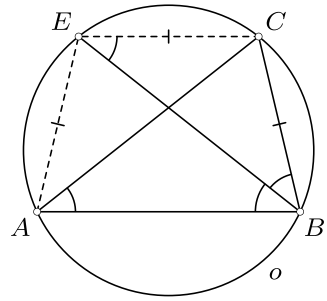
T a) $EA = BC$;

N b) $CA = 2 \cdot BC$;

T c) proste EC i AB są równoległe.

Wyjaśnienie

a) Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez o (rys. 14). Z warunków zadania wynika, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBE = \sphericalangle EBA$. Kąty te są wpisane w okrąg o i oparte odpowiednio na łukach BC, CE oraz EA, a więc łuki te są równej długości. Stąd wniosek, że również cięciwy BC, CE oraz EA są równej długości.



rys. 14

b) Zapisując nierówność trójkąta dla trójkąta ACE, uzyskujemy

$$CA < CE + EA = 2 \cdot BC.$$

c) Kąty BEC i EBA są kątami wpisanymi w okrąg o, opartymi odpowiednio na łukach BC i EA, które są równej długości. Wobec tego $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBA$, a to oznacza, że proste EC i AB są równoległe.

Uwaga

W rozwiązaniu skorzystaliśmy z własności kątów wpisanych w okrąg, opartych na przystających łukach. Więcej własności i przykładów zastosowań w zadaniach można odnaleźć w artykule „O łukach równej długości”, *Kwadrat* nr 14 (grudzień 2014).

---

88. Każdy z dwóch boków trójkąta ostrokątnego ma długość 2. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{T}}$ a) pole tego trójkąta jest mniejsze od 2;

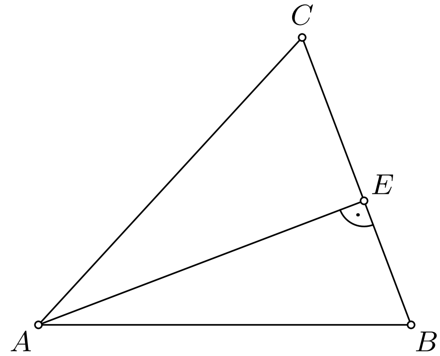
$\boxed{\text{T}}$ b) każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2;

$\boxed{\text{N}}$ c) trzeci bok tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.

Wyjaśnienie

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny ABC i jego wysokość AE (rys. 15). W trójkącie prostokątnym AEB przyprostokątna AE jest krótsza od przeciwprostokątnej AB. Podobnie wykazujemy, że odcinek AE jest krótszy od odcinka AC.

A zatem w trójkącie ostrokątnym ABC, wysokość poprowadzona z dowolnego wierzchołka jest krótsza od każdego z boków wychodzących z tego wierzchołka. Ponieważ w trójkącie, o którym mowa w zadaniu, dwa boki mają długość 2, więc każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.



rys. 15

a) Rozpatrzmy wysokość danego trójkąta, opuszczoną na bok długości 2. Wykazaliśmy wyżej, że ma ona długość mniejszą od 2. Wobec tego pole trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$.

c) Zauważmy, że trójkąt równoboczny o boku długości 2 spełnia warunki zadania.

---

89. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Wynika z tego, że

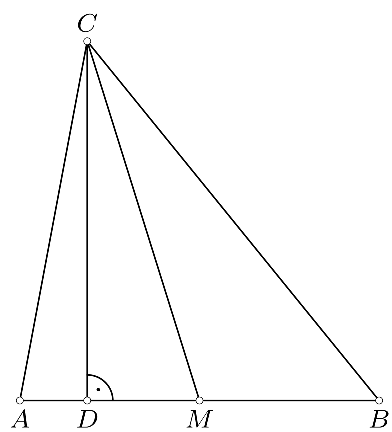
N a) $2\cdot DM < AB$;

T b) $CD \leqslant AC$ oraz $CD \leqslant BC$;

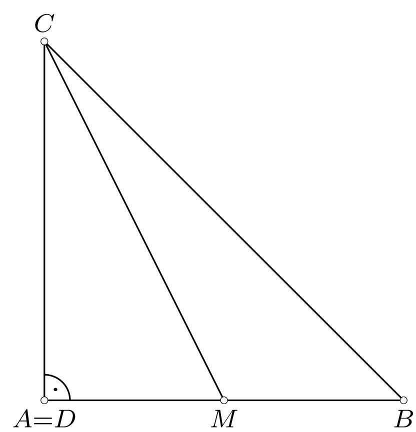
N c) $CM < AC$ oraz $CM < BC$.

Wyjaśnienie

b) Jeżeli punkty A i D pokrywają się, to $CD = CA$. W przeciwnym wypadku odcinek CD jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CDA, więc długość tego odcinka jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej CA tego trójkąta, czyli $CD<CA$ (rys. 16). Wobec tego $CD \leqslant AC$. Analogicznie uzasadniamy, że $CD \leqslant CB$.



rys. 16



rys. 17

a), c) Niech ABC będzie równoramiennym trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A (rys. 17). Wówczas punkty A i D pokrywają się, więc $2DM=2AM=AB$. Odcinek CA jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CAM, więc jego długość jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli $CM > AC$.

---

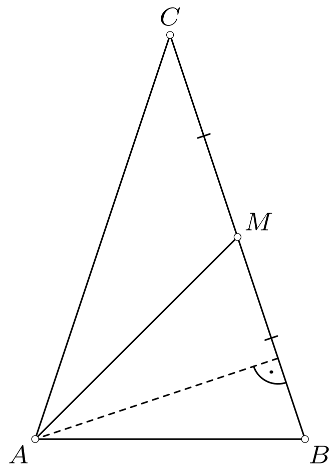
90. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC. Wynika z tego, że

T a) $2 \cdot AM < 3 \cdot BC$;

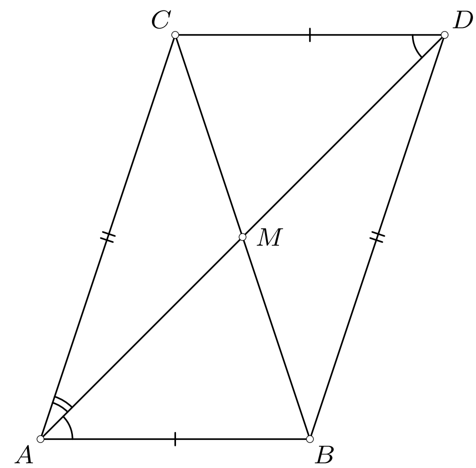
T b) pola trójkątów ABM i ACM są równe;

N c) $\sphericalangle CAM = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

Wyjaśnienie



rys. 18



rys. 19

a) Z nierówności trójkąta dla trójkąta CAM wynika, że

$$AM < AC + CM = BC + \tfrac{1}{2} BC = \tfrac{3}{2} BC, \quad \text{skąd} \quad 2 \cdot AM < 3 \cdot BC\,.$$

b) Trójkąty ABM i ACM mają równe podstawy $MB = MC$ oraz tę samą wysokość poprowadzoną na te podstawy (rys. 18). Stąd wniosek, że trójkąty te mają równe pola.

c) Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB, w którym podstawa AB jest krótsza od ramienia AC. Wykażemy, że wówczas $\sphericalangle CAM < \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (rys. 19). Wówczas $DC < AC$, a więc $\sphericalangle CAM < \sphericalangle CDA = \sphericalangle MAB$. Wobec tego

$$2\sphericalangle CAM < \sphericalangle CAM + \sphericalangle MAB = \sphericalangle CAB\,.$$

---

91. Dane są trójkąty ABC i $A'B'C'$, dla których

$$AB < A'B', \quad BC < B'C' \quad \text{oraz} \quad CA < C'A'\,.$$

Wynika z tego, że

T a) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od obwodu trójkąta $A'B'C'$;

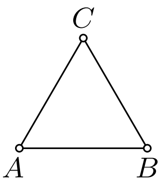
N b) pole trójkąta ABC jest mniejsze od pola trójkąta $A'B'C'$;

N c) istnieje trójkąt przystający do trójkąta ABC, który można umieścić wewnątrz trójkąta $A'B'C'$.

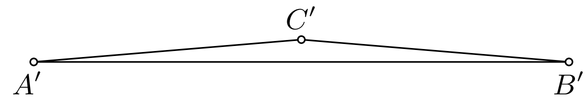
Wyjaśnienie

a) Dodając dane nierówności stronami, uzyskujemy

$$AB + BC + CA < A'B' + B'C' + C'A'\,.$$



rys. 20



rys. 21

b) Rozpatrzmy następujące trójkąty: Trójkąt ABC jest równoboczny i ma bok długości 1 (rys. 20). Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, a więc jest większe od $\frac{1}{4}$. Z kolei trójkąt $A'B'C'$ jest trójkątem równoramiennym o podstawie $A'B' = 4$ i wysokości poprowadzonej z wierzchołka C' równej $\frac{1}{16}$ (rys. 21). Wówczas pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe $\frac{1}{8}$. Ponadto spełnione są nierówności

$$AB < A'B', \quad BC < B'C' \quad \text{oraz} \quad CA < C'A',$$

lecz pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta $A'B'C'$.

c) Rozpatrzmy ponownie trójkąty ABC i $A'B'C'$ skonstruowane w części b). Ponieważ pole trójkąta ABC jest większe od pola trójkąta $A'B'C'$, więc nie istnieje trójkąt przystający do trójkąta ABC, który można umieścić wewnątrz trójkąta $A'B'C'$.

---

92. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o

$\boxed{\text{N}}$ a) 20%;

$\boxed{\text{N}}$ b) 40%;

$\boxed{\text{T}}$ c) 44%.

Wyjaśnienie

Oznaczmy przez a początkową długość boku kwadratu. Zwiększając liczbę a o 20%, uzyskujemy liczbę $a + \frac{20}{100}a = \frac{12}{10}a$. Pole kwadratu o boku długości $\frac{12}{10}a$ jest równe

$$\left(\frac{12}{10}a\right)^2 = \frac{144}{100}a^2 = a^2 + \frac{44}{100}a^2.$$

Stąd wynika, że pole tego kwadratu, początkowo równe a^2, zwiększyło się o 44%.

---

93. Istnieje kwadrat, w którym przekątna jest dłuższa od boku o dokładnie

$\boxed{\text{T}}$ a) 1;

$\boxed{\text{T}}$ b) $\sqrt{2}$;

$\boxed{\text{T}}$ c) $\sqrt{2}-1$.

Wyjaśnienie

W kwadracie o boku a przekątna ma długość $a\sqrt{2}$, więc różnica między długością przekątnej a długością boku jest równa $a(\sqrt{2}-1)$. Aby zbudować odpowiedni kwadrat w kolejnych podpunktach, rozwiązujemy równania

$$a(\sqrt{2}-1) = 1, \quad a(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}, \quad a(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1,$$

uzyskując odpowiednio $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ oraz $a = 1$.

94. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

T a) $AB \cdot BC < 1$;

N b) $AB < 1$;

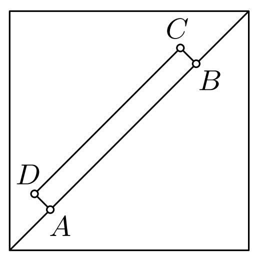
T c) $AC < \sqrt{2}$.

Wyjaśnienie

a) Ponieważ prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i nie jest całym kwadratem, więc jego pole jest mniejsze od pola tego kwadratu, czyli $AB \cdot BC < 1$.

c) Najdłuższym odcinkiem zawartym w kwadracie jest jego przekątna. Ponieważ dany w zadaniu kwadrat ma bok długości 1, więc jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$. Punkty A i C nie leżą na brzegu kwadratu, czyli odcinek AC jest krótszy od przekątnej kwadratu. Zatem $AC < \sqrt{2}$.

b) Przypuśćmy, że odcinek AB długości 1 leży na przekątnej kwadratu w taki sposób, że żaden z punktów A, B nie pokrywa się z wierzchołkiem kwadratu (rys. 22). Wówczas dowolny prostokąt o boku AB, zawarty wewnątrz danego kwadratu, spełnia warunki zadania.



rys. 22

95. Punkt P znajduje się wewnątrz prostokąta $ABCD$ o polu 1, przy czym $AB > BC$. Wynika z tego, że

T a) co najmniej jeden z trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP ma pole mniejsze od $0,26$;

N b) suma pól trójkątów ABP i CDP jest większa od $0,5$;

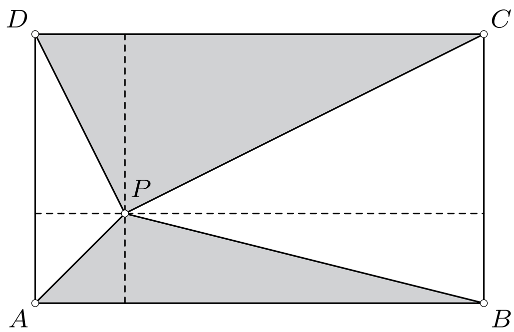
N c) suma pól trójkątów ABP i BCP jest większa od $0,5$.

Wyjaśnienie

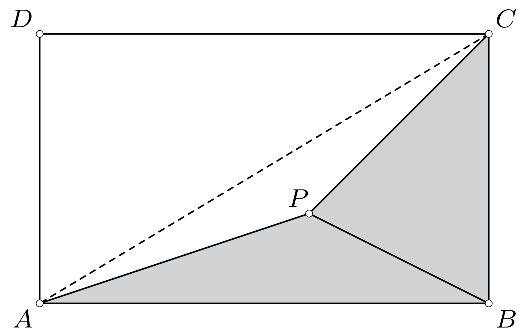
a) Gdyby każdy z omawianych czterech trójkątów miał pole równe co najmniej $0,26$, to suma pól tych trójkątów byłaby nie mniejsza od $4 \cdot 0,26 = 1,04$. Tymczasem suma pól tych trójkątów jest równa polu prostokąta $ABCD$, jest więc równa 1.

b) Udowodnimy, że niezależnie od wyboru punktu P suma pól trójkątów ABP i CDP jest równa $0,5$.

Podzielmy prostokąt $ABCD$ na cztery mniejsze prostokąty prostymi przechodzącymi przez punkt P (rys. 23). Każdy z otrzymanych mniejszych prostokątów możemy podzielić przekątną na dwa trójkąty przystające, a więc trójkąty o równych polach, z których jeden kolorujemy na szaro, a drugi na biało. Suma pól trójkątów ABP i CDP, czyli szara powierzchnia, stanowi więc połowę pola prostokąta $ABCD$.



rys. 23



rys. 24

c) Jeżeli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC (rys. 24), to suma pól trójkątów ABP i BCP jest mniejsza od pola trójkąta ABC, równego $0,5$.

---

96. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że ten czworokąt jest

N a) rombem;

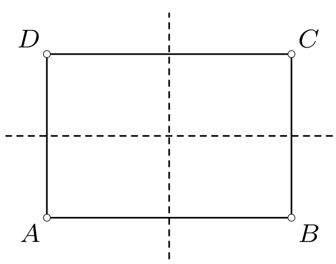
N b) prostokątem;

T c) równoległobokiem.

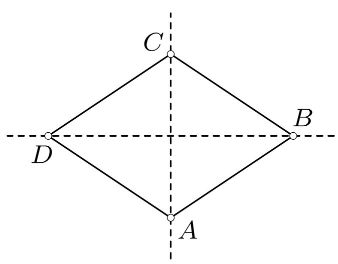
Wyjaśnienie

a) Dowolny prostokąt nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 25).

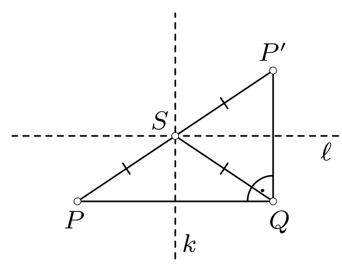
b) Dowolny romb nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 26).



rys. 25



rys. 26



rys. 27

c) Udowodnimy ogólniejszy fakt: jeżeli wielokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to są one prostopadłe, a ich punkt przecięcia jest środkiem symetrii wielokąta. Wynika stąd, że jeśli czworokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to ma on także środek symetrii, a więc jest równoległobokiem.

Niech k i ℓ będą (jedynymi dwiema) osiami symetrii wielokąta $\mathcal{W}$. Oznaczmy przez k' prostą symetryczną do prostej k względem prostej ℓ. Wówczas prosta k' również jest osią symetrii wielokąta $\mathcal{W}$ oraz $k' \neq \ell$, skąd wynika, że $k' = k$. Tym samym prosta k jest symetryczna względem prostej ℓ (różnej od k), a to oznacza, że proste k i ℓ są prostopadłe.

Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych k i ℓ. Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny, Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej k, a P' będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej ℓ (rys. 27). Zauważmy, że punkt P należy do wielokąta $\mathcal{W}$ dokładnie wtedy, gdy punkt Q należy do wielokąta $\mathcal{W}$, czyli dokładnie wtedy, gdy punkt P' należy do wielokąta $\mathcal{W}$. Dowód będzie więc zakończony, jeśli wykażemy, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S — będzie to oznaczało, że S jest środkiem symetrii wielokąta $\mathcal{W}$.

Zauważmy, że $SP = SQ = SP'$, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQP'. Z prostopadłości prostych k i ℓ wynika, że $\sphericalangle PQP' = 90^\circ$, czyli trójkąt PQP' jest prostokątny i wobec tego punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej PP'. To oznacza, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S i kończy dowód faktu.

Uwaga

Można uzasadnić, że jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest on prostokątem (nie będącym kwadratem) lub rombem (nie będącym kwadratem). Zarówno prostokąt, jak i romb są równoległobokami. Wobec tego, jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest równoległobokiem, choć oczywiście nie każdy równoległobok ma dwie osie symetrii.

---

97. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

N a) czworokąt ten jest kwadratem;

N b) czworokąt ten jest rombem;

T c) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Wyjaśnienie

a), b) Rozpatrzmy dwa dowolne przecinające się pod kątem prostym odcinki AC i BD, których środki się nie pokrywają. Końce tych odcinków tworzą czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, a więc tym bardziej rombem, czy też kwadratem.

c) Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa odpowiednio dla trójkątów APB i CPD, otrzymujemy

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 \quad \text{oraz} \quad CD^2 = CP^2 + DP^2 .$$

Dodając powyższe równości stronami, uzyskujemy $AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$. Analogicznie dowodzimy, że $BC^2 + DA^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$. Stąd wniosek, że $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

---

98. Istnieje taki czworokąt wypukły, że każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty

T a) prostokątne;

N b) ostrokątne;

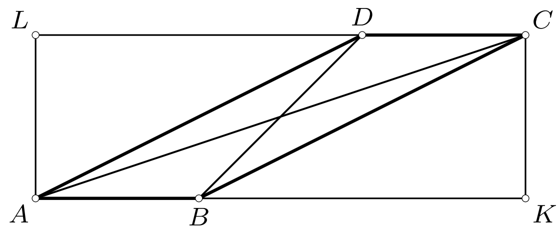
T c) rozwartokątne.

Wyjaśnienie

a) Każda przekątna prostokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.

b) Gdyby taki czworokąt istniał, to jego każdy kąt wewnętrzny byłby ostry. Jednak wówczas suma kątów wewnętrznych tego czworokąta byłaby mniejsza od $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, co nie może mieć miejsca.

c) Rozważmy prostokąt $AKCL$, w którym $AK = 3$, $KC = 1$ oraz takie punkty B i D leżące odpowiednio na bokach AK i CL, że $AB = CD = 1$ (rys. 28). Wówczas kąty KBC, KBD, LDA, LDB są ostre, więc każda przekątna równoległoboku $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty rozwartokątne.



rys. 28

99. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wynika z tego, że

N a) pola trójkątów BCD i BAD są równe;

T b) środek przekątnej BD należy do przekątnej AC;

N c) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Wyjaśnienie

b) Rozważmy wysokości BM i DN odpowiednio trójkątów ABC i ADC. Ponieważ pola tych trójkątów są równe oraz mają one wspólną podstawę AC, więc $BM = DN$.

Odcinki BM i DN są więc równej długości i równoległe. Wobec tego, jeśli punkty M i N pokrywają się, to każdy z nich jest środkiem odcinka BD, skąd wynika, że środek ten leży na przekątnej AC. W przeciwnym wypadku, czworokąt $MBND$ jest równoległobokiem, a zatem środek przekątnej BD pokrywa się ze środkiem przekątnej MN. Stąd wniosek, że również w tym przypadku środek przekątnej BD należy do przekątnej AC.

a), c) Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq BC$. Niech D będzie obrazem symetrycznym punktu B względem prostej AC. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest wypukły, a pola trójkątów ABC i ADC są równe, gdyż są to trójkąty przystające. Ponieważ wysokości trójkątów BCD i BAD opuszczone na wspólny bok BD są różnej długości, więc pola tych trójkątów są różne. Ponadto $AB \neq CD$, a zatem czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem.

100. Każdy bok pewnego czworokąta ma długość mniejszą od 1. Wynika z tego, że

T a) pole tego czworokąta jest mniejsze od 1;

N b) istnieje kwadrat o boku 1, w którym ten czworokąt jest zawarty;

N c) długość każdej przekątnej tego czworokąta jest mniejsza od $\sqrt{2}$.

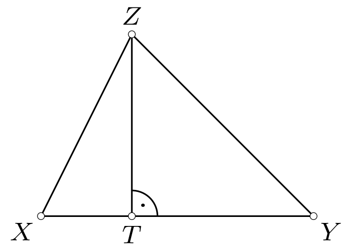
Wyjaśnienie

Udowodnimy najpierw następujący fakt: jeżeli co najmniej dwa z boków trójkąta mają długość mniejszą od 1, to pole tego trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Niech XYZ będzie trójkątem, w którym $XY < 1$ oraz $XZ < 1$ (rys. 29). Oznaczmy przez T rzut prostokątny punktu Z na prostą XY (punkt T może leżeć poza odcinkiem XY lub pokrywać się z jednym z punktów X, Y). W trójkącie prostokątnym XZT (być może zdegenerowanym do odcinka) przeciwprostokątna XZ jest nie krótsza od przyprostokątnej ZT, czyli $ZT \leqslant XZ$. Uzyskujemy więc nierówność

$$[XYZ] = \frac{XY \cdot ZT}{2} \leqslant \frac{XY \cdot XZ}{2} < \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. To kończy dowód.



rys. 29

a) Niech $ABCD$ będzie czworokątem, którego każdy bok ma długość mniejszą od 1. Korzystając z udowodnionego na początku faktu, otrzymujemy

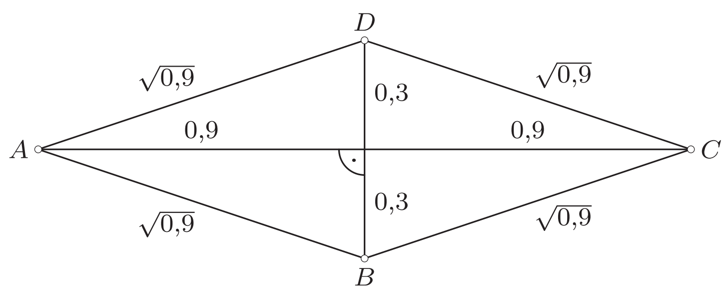
$$[ABC] < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad [ADC] < \frac{1}{2}.$$

Dodając stronami dwie powyższe nierówności, uzyskujemy $[ABCD] < 1$.

c) Rozważmy prostopadłe odcinki AC, BD o długościach odpowiednio $1{,}8$, $0{,}6$, które dzielą się na połowy (rys. 30). Wówczas czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego każdy bok ma długość

$$\sqrt{0{,}9^2+0{,}3^2} = \sqrt{0{,}81+0{,}09} = \sqrt{0{,}9} < 1.$$

Z kolei przekątna AC ma długość większą od $\sqrt{2}$, gdyż $(1{,}8)^2 = 3{,}24 > 2 = (\sqrt{2})^2$.



rys. 30

b) Każdy odcinek zawarty w kwadracie o boku 1 ma długość co najwyżej $\sqrt{2}$. Stąd wniosek, że czworokąta $ABCD$ skonstruowanego w punkcie c) nie można umieścić wewnątrz takiego kwadratu.

---

101. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu i $AB = BC$. Wynika z tego, że

N a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$;

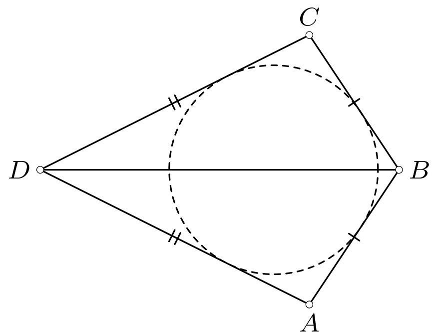
T b) $CD = DA$;

N c) czworokąt $ABCD$ jest rombem.

Wyjaśnienie

b) Skoro czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, to $AB + CD = BC + DA$. Stąd wynika, że jeśli $AB = BC$, to $CD = DA$.

a) Rozpatrzmy trójkąt ABD, w którym $AB < AD$. Niech C będzie obrazem symetrycznym punktu A względem prostej BD (rys. 31). Wówczas $AB + CD = BC + DA$, a więc czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Ponadto, skoro $AB < AD$, to $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$. Mnożąc tę nierówność stronami przez 2, uzyskujemy $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC$.



rys. 31

c) Czworokąt $ABCD$ zbudowany punkcie a) spełnia warunki zadania, ale nie jest rombem.

---

102. Punkty A i B leżą na okręgu o środku O, przy czym $\sphericalangle OAB = 45°$. Punkt C leży na dłuższym łuku AB tego okręgu. Wynika z tego, że

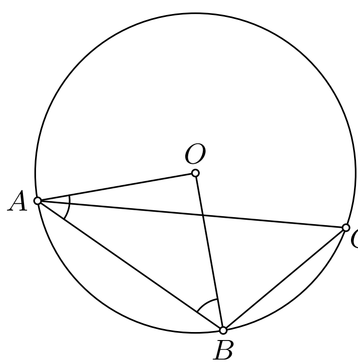
T a) $\sphericalangle ABO = 45°$;

T b) $\sphericalangle ACB = 45°$;

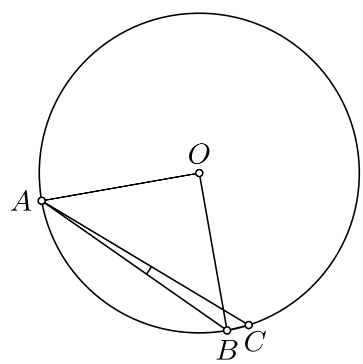
N c) $\sphericalangle ABC < 130°$.

Wyjaśnienie

a) Odcinki OA i OB są promieniami danego okręgu, więc są równej długości. Wobec tego $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = 45°$.



rys. 32



rys. 33

b) Suma kątów w trójkącie ABO jest równa $180°$, a zatem $\sphericalangle AOB = 90°$. Kąt AOB jest kątem środkowym, a kąt ACB kątem wpisanym i oba są oparte na tym samym łuku o końcach A i B (rys. 32). Wobec tego $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = 45°$.

c) Wybierzmy punkt C, zgodnie z warunkami zadania oraz tak, aby $\sphericalangle BAC = 4°$ (rys. 33). Wówczas korzystając z części b), uzyskujemy

$$\sphericalangle ABC = 180° - (\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC) = 180° - (45° + 4°) = 131° > 130°.$$

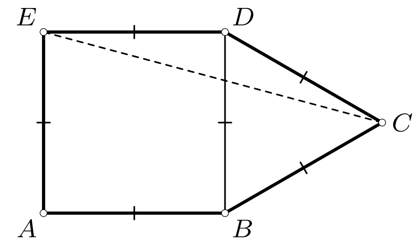
---

103. Wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości. Wynika z tego, że

N a) wszystkie przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równej długości;

N b) proste AB i CE są równoległe;

N c) pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.



rys. 34

Wyjaśnienie

Niech $ABDE$ będzie kwadratem, a BCD — trójkątem równobocznym zbudowanym na zewnątrz tego kwadratu (rys. 34). Wówczas wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości.

a) Mamy $AD > BD$, gdyż w trójkącie prostokątnym ABD przeciwprostokątna jest dłuższa od przyprostokątnej.

b) Proste AB i DE są równoległe, a proste DE i CE nie są równoległe. Wobec tego proste AB i CE również nie są równoległe.

c) Nie wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe, np. $\sphericalangle EAB = 90^\circ$, a $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Wobec tego nie jest to pięciokąt foremny.

---

104. Wszystkie kąty sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ są równe. Wynika z tego, że

T a) proste AB i DE są równoległe;

N b) odcinki BC i EF są równej długości;

N c) sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny.

Wyjaśnienie

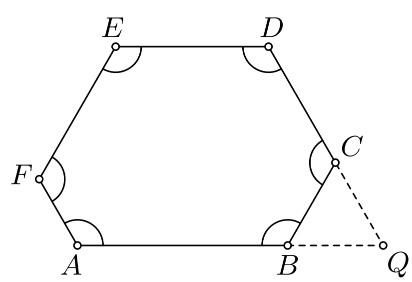
a) Wszystkie kąty sześciokąta $ABCDEF$ są równe, więc każdy z nich ma miarę 120°. Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostych AB i CD (rys. 35). Wówczas

$$\sphericalangle QBC = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QCB = 60^\circ .$$

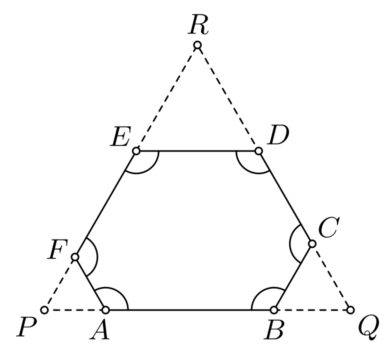
Wynika stąd, że $\sphericalangle BQC = 60^\circ$. Zatem

$$\sphericalangle BQC + \sphericalangle EDQ = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ ,$$

co oznacza, że proste AB i DE są równoległe.



rys. 35



rys. 36

b), c) Niech PQR będzie trójkątem równobocznym (rys. 36). Poprowadźmy prostą AF równoległą do boku QR oraz prostą BC równoległą do boku RP, jak pokazano na rysunku 36. Teraz poprowadźmy prostą ED równoległą do boku PQ, ale w taki sposób, aby długości odcinków BC i EF były różnej długości. Otrzymaliśmy w ten sposób sześciokąt wypukły $ABCDEF$.

Ponieważ trójkąty PAF, QBC i RED są równoboczne, więc każdy kąt wewnętrzny sześciokąta $ABCDEF$ ma miarę $120°$. W sześciokącie tym odcinki BC i EF są różnej długości. Stąd wniosek, że sześciokąt $ABCDEF$ nie jest foremny.

---

105. Sześciokąt foremny podzielono na sześć przystających wielokątów wypukłych. Wynika z tego, że każdy z tych wielokątów ma co najmniej

N a) jeden kąt wewnętrzny o mierze $60°$;

N b) jeden kąt wewnętrzny o mierze $120°$;

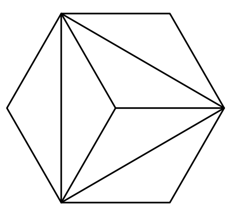
N c) dwa kąty wewnętrzne ostre.

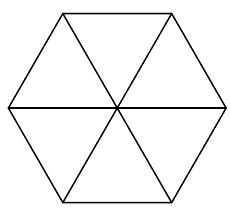
Wyjaśnienie

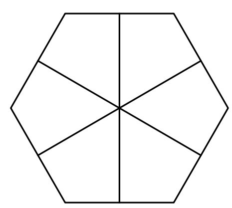
a) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów o kątach $30°, 30°, 120°$ (rys. 37).

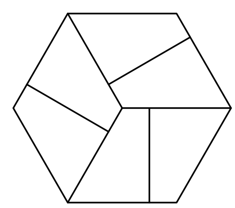
b) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów równobocznych (rys. 38).

c) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających czworokątów o kątach $60°, 90°, 90°, 120°$ (rys. 39 lub rys. 40).


rys. 37


rys. 38


rys. 39


rys. 40

---

106. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku S. Wynika z tego, że

T a) $AB+CD+EF=BC+DE+FA$;

N b) $AD=BE=CF$;

T c) suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS, DES, FAS.

Wyjaśnienie

a) Oznaczmy odpowiednio przez a, b, c, d, e, f długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ poprowadzonych z punktów A, B, C, D, E, F (rys. 41). Wówczas

$$AB+CD+EF=a+b+c+d+e+f=BC+DE+FA.$$

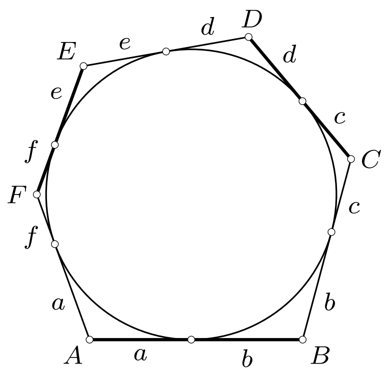
c) Zauważmy, że wysokości trójkątów ABS, CDS, EFS opuszczone z wierzchołka S mają tę samą długość, równą promieniowi r okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ (rys. 42). Wobec tego suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa

$$\frac{AB\cdot r}{2}+\frac{CD\cdot r}{2}+\frac{EF\cdot r}{2}=\frac{r}{2}(AB+CD+EF).$$

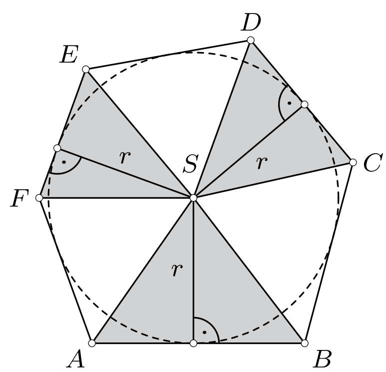
Analogicznie dochodzimy do wniosku, że suma pól trójkątów BCS, DES, FAS jest równa

$$\frac{r}{2}(BC+DE+FA).$$

Aby przekonać się, że rozważane sumy pól są równe, pozostaje skorzystać z konkluzji podpunktu a).



rys. 41

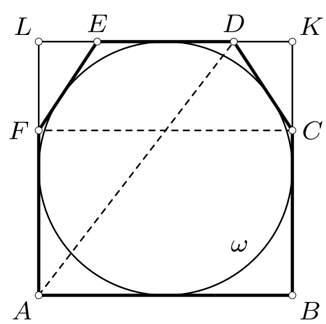


rys. 42

b) Rozważmy kwadrat $ABKL$ opisany na okręgu ω. Na bokach AL, BK wybierzmy odpowiednio takie punkty F, C, że $AF=BC>\frac{1}{2}AB$ (rys. 43). Wreszcie niech D, E będą takimi punktami należącymi do odcinka KL, że odcinki CD i EF są styczne do okręgu ω.

Wówczas $ABCDEF$ jest sześciokątem opisanym na okręgu ω, ale

$$CF=AB=AL<AD.$$



rys. 43

---

107. Wielokąt A ma co najmniej osiem wierzchołków oraz dwa razy więcej boków niż wielokąt B. Wynika z tego, że wielokąt A ma

T a) dwa razy więcej wierzchołków niż wielokąt B;

N b) dwa razy więcej przekątnych niż wielokąt B;

N c) parzystą liczbę przekątnych.

Wyjaśnienie

a) Każdy wielokąt ma tyle samo boków co wierzchołków. Wobec tego, skoro wielokąt A ma dwa razy więcej boków niż wielokąt B, to ma on również dwa razy więcej wierzchołków.

b) Zauważmy, że liczba przekątnych każdego n-kąta jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$. Rzeczywiście, każdy z wierzchołków n-kąta jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$. W szczególności wynika stąd, że czworokąt ma dwie przekątne, a mający dwa razy więcej boków ośmiokąt ma 20, czyli 10 razy więcej, przekątnych.

c) Korzystając ze wzoru na liczbę przekątnych w n-kącie wypukłym, wyprowadzonego w poprzednim podpunkcie, stwierdzamy, że każdy dziesięciokąt wypukły ma dokładnie $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10-3)=35$, czyli nieparzystą liczbę, przekątnych.

---

108. Dany jest 101-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{101}$. Wynika z tego, że

| T | a) trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny;

| T | b) trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny;

| N | c) pewien trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ jest prostokątny.

Wyjaśnienie

Rozważmy okrąg opisany na danym 101-kącie. Przyjmijmy, że kolejność wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ na tym okręgu jest zgodna z ruchem wskazówek zegara. Przez *łuk* XY będziemy rozumieli łuk danego okręgu biegnący od punktu X do punktu Y zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

a), b) Zauważmy, że łuki A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{101}A_1$ są równej długości. Oznaczmy tę długość przez a. Wówczas łuki A_5A_{10} oraz $A_{10}A_{15}$ mają długość równą $5a$. Wobec tego $\sphericalangle A_5A_{15}A_{10}=\sphericalangle A_{10}A_5A_{15}$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości. Stąd wniosek, że trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny. Ponieważ oba łuki $A_{100}A_{15}$ oraz $A_{15}A_{31}$ mają długość $16a$, więc analogicznie wykazujemy, że trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny.

c) Ponieważ 101 jest liczbą nieparzystą, więc żadne dwa punkty spośród wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ nie są końcami średnicy rozpatrywanego okręgu. Stąd wniosek, że żaden trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ nie może być prostokątny.

---

109. Istnieje n-kąt wypukły ($n\geqslant 4$), w którym liczba przekątnych

| N | a) jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym dodatnim;

| T | b) równa jest liczbie wierzchołków;

| N | c) jest mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

Wyjaśnienie

Wykażemy, że liczba przekątnych n-kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Każdy z wierzchołków n-kąta wypukłego jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$.

a) Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi równość

$$\tfrac{1}{2}n(n-3)=4^k, \quad \text{czyli} \quad n(n-3)=2^{2k+1}.$$

Liczby całkowite dodatnie n, $n-3$ różnią się o 3, więc jedna z tych liczb jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedynym nieparzystym dzielnikiem liczby 2^{2k+1} jest liczba 1, skąd wniosek, że $n-3=1$, czyli $n=4$. Jednak liczba przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 2, a 2 nie jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba k o szukanych własnościach.

b) Każdy pięciokąt wypukły ma dokładnie 5 przekątnych.

c) Ponieważ $n \geqslant 4$, więc $n-3 \geqslant 1$, a zatem $\frac{1}{2}n \cdot (n-3) \geqslant \frac{1}{2}n$. To oznacza, że liczba przekątnych jest nie mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

---

110. Odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB. Wynika z tego, że

T a) pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF;

N b) obwód trójkąta ABE jest mniejszy od obwodu trójkąta ABF;

N c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest mniejszy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF.

Wyjaśnienie

a) Trójkąty ABE i ABF mają wspólną podstawę AB, a wysokość trójkąta ABE jest mniejsza od wysokości trójkąta ABF. Wobec tego pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF.

Rozpatrzmy proste k i l równoległe do prostej AB. Przyjmijmy, że odległość prostej k od prostej AB jest mniejsza od odległości prostej l od prostej AB.

b) Wybierzmy dowolny punkt F na prostej l. Na prostej k znajdujemy taki punkt E, że długość odcinka AE jest większa od obwodu trójkąta ABF. Punkty E i F spełniają warunki zadania (odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB), jednak obwód trójkąta ABE jest *większy* od obwodu trójkąta ABF.

c) Wybierzmy dowolny punkt E na prostej k. Przez punkt B poprowadźmy prostą m, której odległość od punktu A jest dodatnia, ale mniejsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE. Niech F będzie punktem przecięcia prostych l i m. Wówczas punkty E i F spełniają warunki zadania. Ponadto promień okręgu wpisanego w trójkąt ABF jest mniejszy od wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A. Z kolei wysokość ta ma długość równą odległości punktu A od prostej m i jest krótsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE.

---

111. Każdy punkt okręgu ω o promieniu 1 pomalowano na czarno lub biało w taki sposób, że każda cięciwa tego okręgu o długości 1 ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że

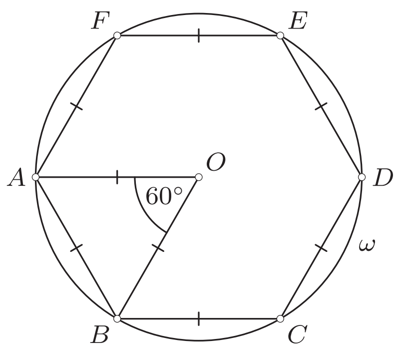
T a) każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów;

T b) każdy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg ω ma wszystkie trzy wierzchołki tego samego koloru;

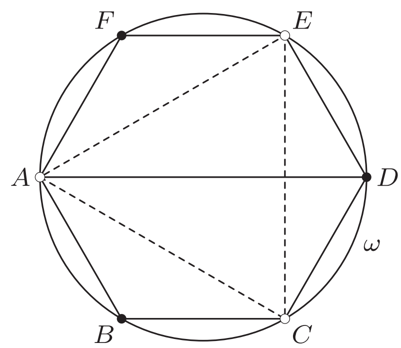
T c) każdy kwadrat wpisany w okrąg ω ma dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

Wyjaśnienie

Oznaczmy przez O środek okręgu ω. Niech A będzie dowolnym punktem okręgu ω oraz niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym wpisanym w ten okrąg (rys. 44). Wówczas $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, gdyż jest to kąt środkowy oparty na łuku będącym $\frac{1}{6}$ okręgu. Stąd wniosek, że trójkąt ABO jest równoboczny, więc $AB = OA = 1$. To oznacza, że każdy z boków sześciokąta $ABCDEF$ jest cięciwą okręgu ω o długości 1.



rys. 44



rys. 45

a) Bez straty ogólności przypuśćmy, że punkt A został pomalowany na biało (rozumowanie w przypadku gdy punkt A jest czarny jest w pełni analogiczne). Wówczas z warunków zadania wynika kolejno, że punkty B i F zostały pomalowane na czarno, punkty C i E na biało i w końcu punkt D na czarno (rys. 45). Odcinek AD jest średnicą okręgu ω, która ma końce różnych kolorów, a punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wniosek, że każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów.

b) Trójkąt ACE o wierzchołkach tego samego koloru jest równoboczny i wpisany w okrąg ω. Punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wynika, że każdy trójkąt równoboczny wpisany w dany okrąg ma wierzchołki tego samego koloru.

c) Zauważmy, że przekątne kwadratu wpisanego w okrąg ω są średnicami tego okręgu. Z punktu a) wiemy, że każda taka średnica ma jeden wierzchołek czarny i jeden biały. Stąd wniosek, że wśród wierzchołków kwadratu zawsze będą dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

---

112. Spośród wierzchołków pewnego dwunastokąta foremnego wyróżniono siedem. Wynika z tego, że wśród wyróżnionych punktów można wskazać takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta

T a) prostokątnego;

N b) równobocznego;

N c) rozwartokątnego równoramiennego.

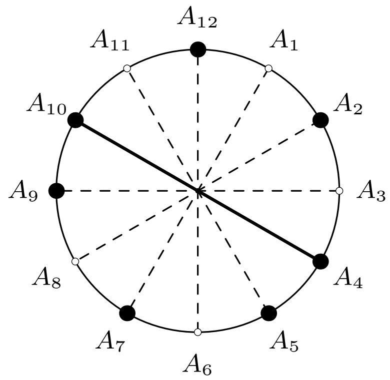
Wyjaśnienie

Oznaczmy dany dwunastokąt foremny przez $A_1A_2\ldots A_{12}$.

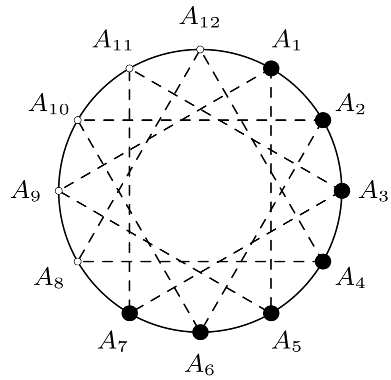
a) Zauważmy, że co najmniej jedna z sześciu średnic okręgu opisanego na danym dwunastokącie

$$A_1A_7,\ A_2A_8,\ A_3A_9,\ A_4A_{10},\ A_5A_{11},\ A_6A_{12}$$

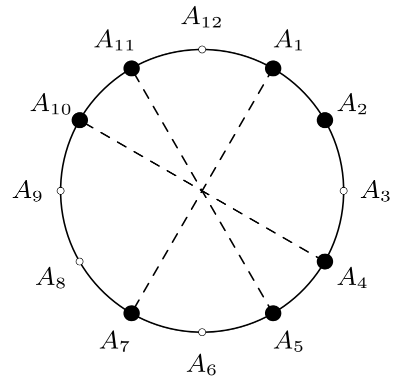
ma obydwa końce w wyróżnionych punktach (rys. 46), gdyż w przeciwnym przypadku wyróżnionych punktów byłoby co najwyżej sześć. Dołączając do końców takiej średnicy dowolny inny wyróżniony punkt, otrzymujemy wierzchołki trójkąta prostokątnego.



rys. 46



rys. 47



rys. 48

b) Jeżeli wyróżnione zostały punkty A_1, A_2, …, A_7, to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta równobocznego (rys. 47). Rzeczywiście, tylko cztery trójki wierzchołków danego dwunastokąta wyznaczają trójkąty równoboczne:

$$A_1A_5A_9,\ A_2A_6A_{10},\ A_3A_7A_{11},\ A_4A_8A_{12}$$

i żadna z nich nie jest złożona wyłącznie z wyróżnionych punktów.

c) Jeżeli wyróżnione zostały punkty A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_{10}, A_{11} (rys. 48), to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego równoramiennego. Wówczas jedynymi trójkątami równoramiennymi o wierzchołkach w wyróżnionych punktach są

$$A_1A_4A_7,\ A_1A_4A_{10},\ A_1A_7A_{10},\ A_2A_5A_{11},\ A_4A_7A_{10}$$

i wszystkie te trójkąty są prostokątne (gdyż odcinki A_1A_7, A_4A_{10}, A_5A_{11} są średnicami okręgu opisanego na danym dwunastokącie).

Uwaga

Można zauważyć, że dołączając punkt A_8 do siódemek wyróżnionych punktów w kontrprzykładach do podpunktów b) oraz c), otrzymujemy ósemki wyróżnionych punktów wciąż stanowiące odpowiednie kontrprzykłady. Wobec tego odpowiedzi w podpunktach b) oraz c) nie ulegną zmianie, jeśli w treści zadania słowo *siedem* zastąpimy przez *osiem*.

Geometria przestrzenna

113. Liczba krawędzi pewnego ostrosłupa jest o 15 większa od liczby jego wszystkich wierzchołków. Wynika z tego, że ten ostrosłup ma dokładnie

N a) 15 ścian bocznych;

T b) 16 ścian bocznych;

N c) 17 ścian bocznych.

Wyjaśnienie

Przyjmimy, że podstawą rozważanego ostrosłupa jest pewien n-kąt. Wtedy liczba wierzchołków tego ostrosłupa jest równa $n+1$, a liczba jego krawędzi jest równa $2n$.

Zgodnie z warunkami podanymi w treści zadania otrzymujemy $2n=(n+1)+15$, skąd wyznaczamy $n=16$. Wobec tego podstawą tego ostrosłupa jest 16-kąt, a więc ostrosłup ten ma 16 ścian bocznych.

---

114. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa

T a) 3^{100};

N b) 5^{100};

N c) 100 001.

Wyjaśnienie

Rozważmy graniastosłup, którego podstawę stanowi pewien n-kąt. Liczba krawędzi tego graniastosłupa jest równa $3n$. Wobec tego liczba krawędzi graniastosłupa jest podzielna przez 3.

a) Liczba 3^{100} jest podzielna przez 3. Jest to liczba krawędzi graniastosłupa, którego podstawą jest 3^{99}-kąt.

b), c) Liczba 5^{100} nie jest podzielna przez 3, gdyż w rozkładzie tej liczby na czynniki pierwsze nie występuje liczba 3. Również liczba 100 001 nie jest podzielna przez 3, gdyż suma cyfr tej liczby nie jest podzielna przez 3.

---

115. Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 15^{14}

T a) wierzchołków;

N b) krawędzi;

T c) ścian.

Wyjaśnienie

a), c) Ostrosłup o podstawie n-kąta ma $n+1$ wierzchołków oraz $n+1$ ścian. Wobec tego dla $n=15^{14}-1$ otrzymujemy ostrosłup o 15^{14} wierzchołkach i 15^{14} ścianach.

b) Ostrosłup o podstawie n-kąta ma $2n$ krawędzi. W każdym ostrosłupie liczba krawędzi jest więc parzysta, podczas gdy 15^{14} nie jest liczbą parzystą.

---

116. Dany jest ostrosłup o parzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równą długość. Wynika z tego, że liczba krawędzi danego ostrosłupa jest mniejsza od

N a) 9;

T b) 11;

T c) 13.

Wyjaśnienie

b), c) Przyjmijmy, że podstawą rozważanego ostrosłupa jest pewien n-kąt. Wtedy liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa $2n$, a liczba jego ścian bocznych jest równa n. Krawędzi jest zatem dwa razy więcej niż ścian bocznych.

Ponieważ wszystkie krawędzie danego ostrosłupa mają równą długość, więc jego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, których kąty przy wierzchołku ostrosłupa są równe $60°$. Suma kątów płaskich przy (górnym) wierzchołku ostrosłupa musi być mniejsza niż $360°$. Wobec tego liczba ścian bocznych wynosi co najwyżej 5. A zatem liczba krawędzi ostrosłupa jest równa co najwyżej 10.

a) Ostrosłup, którego podstawę stanowi pięciokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równobocznymi, spełnia warunki zadania.

---

117. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB, BSC, CSA są równe. Wynika z tego, że

N a) $AS=BS=CS$;

N b) $AB=BC=CA$;

N c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Wyjaśnienie

Rozważmy czworościan foremny $AB'C'S$ o krawędzi długości 2. Niech B i C będą odpowiednio środkami krawędzi $B'S$, $C'S$. Przecinając rozpatrywany czworościan płaszczyzną ABC, otrzymujemy ostrosłup $ABCS$, w którym kąty ASB, BSC, CSA są równe. Ponadto $AB=\sqrt{3}$, $BC=1$, $AC=\sqrt{3}$ oraz $AS=2$, $BS=1$, $CS=1$.

---

118. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

T a) dłuższa od krawędzi podstawy;

N b) równa krawędzi podstawy;

N c) krótsza od krawędzi podstawy.

Wyjaśnienie

Rozważmy ostrosłup prawidłowy siedmiokątny $ABCDEFGS$ o podstawie siedmiokąta foremnego $ABCDEFG$. Oznaczmy przez O rzut prostokątny wierzchołka S na podstawę ostrosłupa. Wówczas $\sphericalangle AOB=360°/7$, a zatem $\sphericalangle AOB<60°$. Wobec tego w trójkącie równoramiennym ABO bok AO jest dłuższy od podstawy AB. Ponadto, w trójkącie prostokątnym AOS przeciwprostokątna AS jest dłuższa od przyprostokątnej AO.

Podsumowując, $AS > AO > AB$, czyli w dowolnym ostrosłupie prawidłowym siedmiokątnym krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy.

---

119. W czworościanie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

T a) $AD \geqslant BC$;

N b) kąt CDA jest prosty;

T c) $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

Wyjaśnienie

a) Przez punkty B i C poprowadźmy odpowiednio płaszczyzny k i l prostopadłe do prostej BC. Wówczas płaszczyzny te są równoległe, a odległość między nimi jest równa długości odcinka BC. Ponadto punkt A należy do płaszczyzny k, a punkt D do płaszczyzny l. Stąd $AD \geqslant BC$.

b) Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B. Przez punkt C poprowadźmy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i wybierzmy na niej punkt D, różny od punktu C. Wówczas czworościan $ABCD$ spełnia warunki zadania. Zauważmy jednak, że w trójkącie ACD kąt ACD jest prosty, a zatem kąt CDA jest mniejszy od 90°.

c) Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \quad \text{a zatem} \quad BC^2 = AC^2 - AB^2.$$

Podobnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCD, otrzymujemy

$$BC^2 + CD^2 = BD^2, \quad \text{więc} \quad BC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Wobec tego $AC^2 - AB^2 = BD^2 - CD^2$, skąd wniosek, że $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

---

120. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L. Wynika z tego, że

T a) $AK = AL$;

T b) $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$;

N c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD.

Wyjaśnienie

a) Oznaczmy przez O środek sfery. Wówczas $\sphericalangle OKA = 90^\circ = \sphericalangle OLA$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$AK^2 = AO^2 - OK^2 = AO^2 - OL^2 = AL^2,$$

skąd $AK = AL$.

b) Wykazaliśmy wyżej, że $AK = AL$. Analogicznie wykazujemy, że $BK = BL$. Trójkąty ABK i ABL mają ponadto wspólny bok AB. Wobec tego trójkąty te są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd wynika, że $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$.

c) Rozpatrzmy taki czworościan $ABCD$, że trójkąt ABC jest równoboczny, a trójkąt ABD prostokątny równoramienny o kącie prostym przy wierzchołku D. Przypuśćmy, że punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD. Wtedy półproste

AK i BK są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC i ABC, skąd wniosek, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ABK = 30°$, więc $\sphericalangle AKB = 120°$. Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle ALB = 135°$. A zatem $\sphericalangle AKB \neq \sphericalangle ALB$, wbrew udowodnionej wcześniej równości $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że oba punkty K i L nie mogą być jednocześnie środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD.

---

121. Co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1. Wynika z tego, że

T a) co najmniej 8 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1;

T b) co najmniej jedna ściana prostopadłościanu $\mathcal{P}$ jest kwadratem;

N c) prostopadłościan $\mathcal{P}$ jest sześcianem.

Wyjaśnienie

a), b) Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ ma cztery krawędzie o długości a, cztery krawędzie o długości b i cztery o długości c. Wobec tego, jeżeli co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu ma długość 1, to co najmniej dwie z liczb a, b, c są równe. To zaś oznacza, że pewne dwie przeciwległe ściany są kwadratami o boku długości 1.

c) Prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ spełnia warunki zadania i nie jest sześcianem.

---

122. Spośród wierzchołków sześcianu wybrano pięć. Wynika z tego, że wśród wybranych punktów istnieją

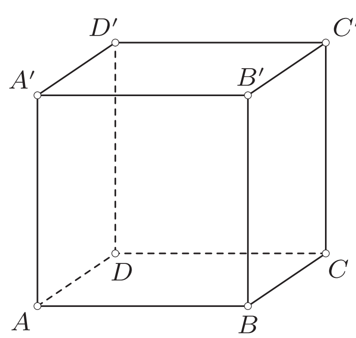
T a) dwa, które są połączone krawędzią sześcianu;

T b) trzy, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego;

N c) cztery, które są wierzchołkami prostokąta.

Wyjaśnienie

Rozważmy sześcian o przeciwległych ścianach $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oznaczonych tak, że odcinki AA', BB', CC', DD' są krawędziami sześcianu (rys. 49).



rys. 49

a) Skoro wybrano pięć punktów, to wybrano obydwa końce co najmniej jednej spośród krawędzi AA', BB', CC', DD'.

b) Zauważmy, że $AB'CD'$ oraz $A'BC'D$ to czworościany, których wszystkie krawędzie mają jednakową długość (równą długości przekątnej ściany sześcianu). Skoro wybrano pięć punktów, to pewne trzy należą do tego samego z tych dwóch czworościanów, a zatem wyznaczają trójkąt równoboczny.

c) Przypuśćmy, że wybrano punkty A, B, C, B', D'. Wówczas żadne cztery z tych punktów nie leżą w jednej płaszczyźnie; nie mogą więc być wierzchołkami prostokąta.

---

123. Pole powierzchni sześcianu A jest 4 razy mniejsze od pola powierzchni sześcianu B. Wynika z tego, że

T a) krawędź sześcianu A jest 2 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

N b) krawędź sześcianu A jest 4 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B;

T c) objętość sześcianu A jest 8 razy mniejsza od objętości sześcianu B.

Wyjaśnienie

a), b) Oznaczmy przez a długość krawędzi sześcianu A, a przez b długość krawędzi sześcianu B. Z warunków zadania wynika, że $6b^2 = 4\cdot 6a^2$, skąd uzyskujemy $b = 2a$.

c) Objętość sześcianu A jest równa a^3, a objętość sześcianu B jest równa

$$b^3 = (2a)^3 = 8a^3,$$

czyli jest 8 razy większa od objętości sześcianu A.

---

124. Sześcian można rozciąć płaskim cięciem na dwa wielościany w taki sposób, aby jeden z tych wielościanów

T a) był graniastosłupem pięciokątnym;

N b) miał osiem ścian;

T c) był ostrosłupem prawidłowym.

Wyjaśnienie

Rozważmy sześcian o podstawie $ABCD$.

a) Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio krawędzi AB i BC. Przecinając rozpatrywany sześcian płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy, przechodzącą przez punkty K i L, otrzymujemy graniastosłup pięciokątny o podstawie $AKLCD$.

c) Oznaczmy przez B' taki wierzchołek sześcianu, że odcinek BB' jest jego krawędzią boczną. Przecinając rozpatrywany sześcian płaszczyzną ACB', otrzymujemy ostrosłup prawidłowy trójkątny: jego podstawa ACB' jest trójkątem równobocznym, a krawędzie boczne AB, CB oraz $B'B$ są równej długości.

b) Rozpatrzmy dowolną z dwóch części, na jakie rozcięto dany sześcian. Jest nią wielościan, którego jedna ściana leży w płaszczyźnie przekroju. Każda z pozostałych ścian tego wielościanu należy do innej ściany wyjściowego sześcianu. Stąd wynika, że otrzymany wielościan ma nie więcej niż siedem ścian.

---

125. Sześcian można rozciąć na

T a) trzy ostrosłupy czworokątne;

T b) cztery graniastosłupy trójkątne;

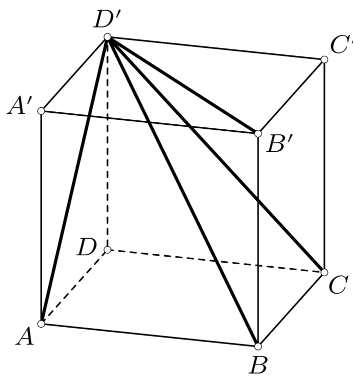
T c) pięć czworościanów;

Wyjaśnienie

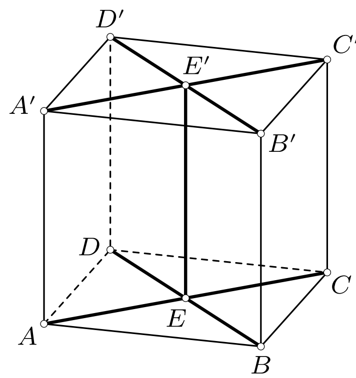
a) Na rysunku 50 sześcian został podzielony na trzy ostrosłupy czworokątne o podstawach $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ABCD$ i wspólnym wierzchołku D'.

b) Na rysunku 51 sześcian został podzielony na cztery graniastosłupy trójkątne o podstawach ABE, BCE, CDE, DEF i wspólnej krawędzi bocznej EE', łączącej środki ścian $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

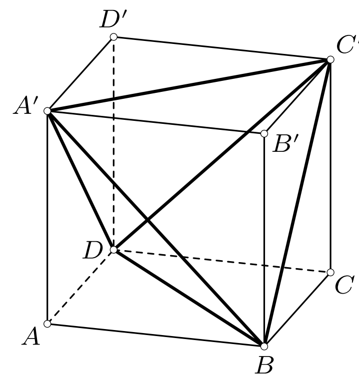
c) Na rysunku 52 sześcian został podzielony na pięć czworościanów $A'BC'B'$, $A'BAD$, $A'D'C'D$, $CBC'D$ oraz $A'BC'D$.



rys. 50



rys. 51



rys. 52

---

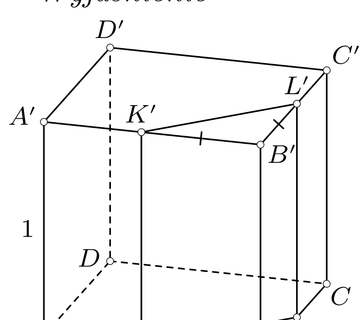
126. Sześcian o krawędzi 1 można tak przeciąć płaszczyzną, aby uzyskać w przekroju prostokąt, którego pole jest

T a) większe od 1;

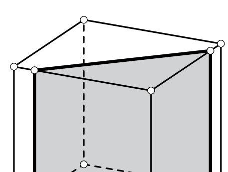
T b) równe 1;

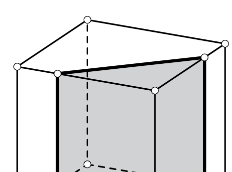
T c) mniejsze od 1.

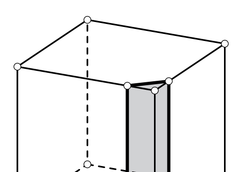
Wyjaśnienie



rys. 53


rys. 54


rys. 55


rys. 56

Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie sześcianem o krawędzi 1, którego wierzchołki są tak oznaczone, że kwadraty $ABCD$, $ABB'A'$ oraz $A'B'C'D'$ są jego ścianami. Oznaczmy przez K, L, K', L' takie punkty leżące odpowiednio na krawędziach AB, BC, $A'B'$, $B'C'$, że

$$BK = BL = B'K' = B'L' = a,$$

przy czym $0 < a < 1$ (rys. 53). Wówczas czworokąty $BKK'B'$ oraz $BLL'B'$ są prostokątami, więc wielościan $BKLB'K'L'$ jest graniastosłupem prostym. Zatem czworokąt $KLL'K'$ jest prostokątem, którego pole jest równe $KL \cdot KK' = a\sqrt{2}$.

a) Jeżeli $a > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 54), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu większym od 1.

b) Jeżeli $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 55), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu równym 1.

c) Jeżeli $a < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 56), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu mniejszym od 1.

Uwaga

W podpunkcie b) odpowiednie cięcie można zrealizować również płaszczyzną równoległą do pewnej pary przeciwległych ścian sześcianu. Z kolei w podpunkcie a) można także na przykład rozważyć cięcie przez parę przeciwległych krawędzi sześcianu (np. płaszczyzną $ACC'A'$, co odpowiada $a = 1$ w przedstawionej w rozwiązaniu konstrukcji).

---

127. Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju trójkąt. Wynika z tego, że

N a) każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie dwie ściany trójkątne;

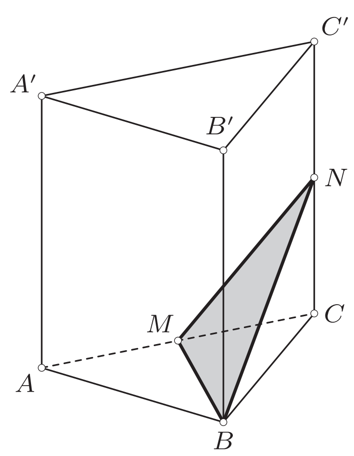
N b) w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie;

N c) każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem lub czworokątem.

Wyjaśnienie

Rozważmy graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC, $A'B'C'$ oznaczonych w taki sposób, że AA', BB', CC' są krawędziami bocznymi graniastosłupa. Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami krawędzi AC i CC'.

Przetnijmy graniastosłup płaszczyzną BMN, uzyskując w przekroju trójkąt (rys. 57). Wówczas jeden z otrzymanych wielościanów ma trzy ściany trójkątne ABM, BMN, $A'B'C'$, w jej wierzchołku B schodzą się dokładnie cztery krawędzie oraz posiada ona ścianę pięciokątną $AMNC'A'$.



rys. 57

128. Ostrosłup o podstawie będącej 10-kątem wypukłym rozcięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pewien wielokąt. Wynika z tego, że

N a) wielokąt ten ma co najwyżej 10 wierzchołków;

N b) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, ma więcej niż 7 wierzchołków;

N c) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, jest ostrosłupem.

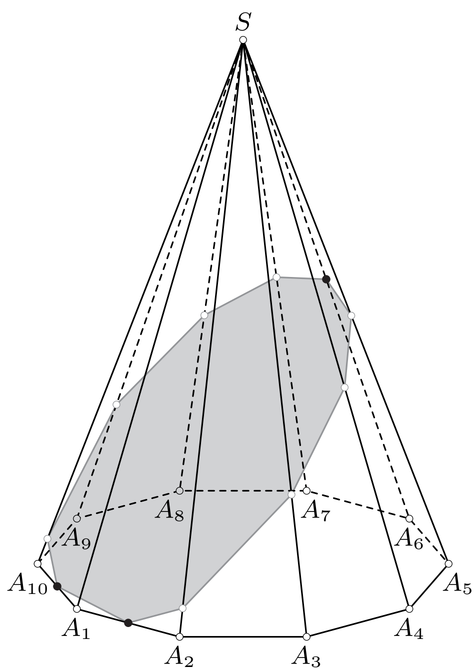
Wyjaśnienie

Rozważmy ostrosłup prawidłowy o podstawie dziesięciokąta foremnego $A_1A_2 \dots A_{10}$ oraz wierzchołku S.

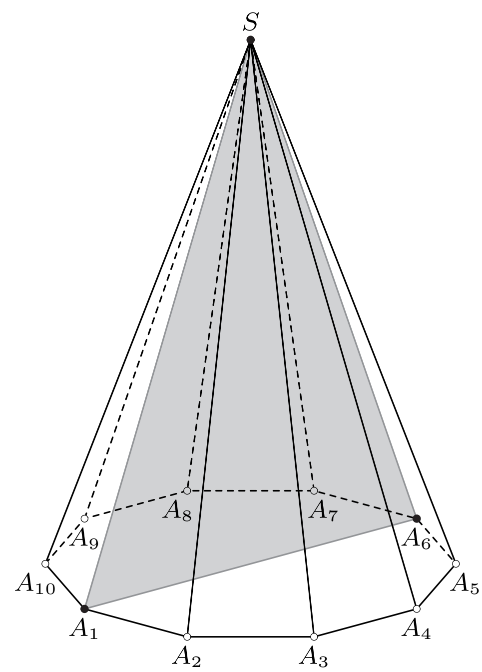
a) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi A_1A_{10}, A_1A_2 oraz A_6S (rys. 58). Płaszczyzna ta przecina 11 krawędzi wyjściowego ostrosłupa, więc w przekroju otrzymujemy pewien 11-kąt wypukły.

c) Żaden z wielościanów otrzymanych z przecięcia opisanego w poprzednim punkcie nie jest ostrosłupem. Jeden z tych wielościanów ma dwie ściany 11-kątne, a każdy ostrosłup ma co najwyżej jedną ścianę nie będącą trójkątem. Drugi z otrzymanych wielościanów ma dwie ściany czworokątne i jedną jedenastokątną, więc również nie może być ostrosłupem.

b) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A_1, A_6 oraz S (rys. 59). Wtedy każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie 7 wierzchołków.



rys. 58



rys. 59

---

129. Dana jest płaszczyzna π oraz dwa punkty A i B nie leżące na tej płaszczyźnie. Niech C i D będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na płaszczyznę π. Wynika z tego, że

T a) punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie;

T b) płaszczyzna π jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej punkty A, C i D.

T c) $AB \geqslant CD$.

Wyjaśnienie

a) Jeśli proste k i l są prostopadłe do płaszczyzny π, to proste te są równoległe. Wynika stąd, że proste AC i BD są równoległe. Każde dwie proste równoległe leżą w jednej płaszczyźnie, więc w szczególności punkty A, B, C, D leżą w jednej płaszczyźnie.

b) Jeśli prosta k jest prostopadła do płaszczyzny π, to każda płaszczyzna zawierająca prostą k jest prostopadła do płaszczyzny π. Prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny π, a zatem płaszczyzna zawierająca punkty A, C i D jest prostopadła do płaszczyzny π.

c) Prosta AC jest prostopadła do płaszczyzny π, a zatem prosta ta jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności także do prostej CD. Zatem $\sphericalangle ACD = 90^\circ$. Niech P będzie takim punktem, że czworokąt $ACDP$ jest prostokątem. Wówczas $CD = AP$ oraz $\sphericalangle APB = 90^\circ$. Stąd uzyskujemy $AB \geqslant AP = CD$.

Kombinatoryka

130. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że

T a) pewne trzy boki są tego samego koloru;

N b) pewne dwie przekątne są różnych kolorów;

N c) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.

Wyjaśnienie

a) Przypuśćmy, że nie istnieją trzy boki tego samego koloru. Wobec tego, co najwyżej dwa boki są czerwone oraz co najwyżej dwa boki są niebieskie. Stąd wniosek, że pomalowano nie więcej niż cztery boki. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewne trzy boki są tego samego koloru.

b), c) Przyjmijmy, że wszystkie boki pięciokąta pomalowano na czerwono, a wszystkie przekątne na niebiesko. Wówczas wszystkie przekątne są tego samego koloru i z żadnego wierzchołka nie wychodzą trzy czerwone ani trzy niebieskie odcinki.

---

131. Każdy punkt prostej pomalowano na czerwono albo na niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 zawarty w tej prostej ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że na tej prostej istnieje odcinek o końcach różnych kolorów, którego długość jest równa

N a) 4;

T b) 5;

T c) 6.

Wyjaśnienie

a) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 4 zawarty w danej prostej, a przez M środek tego odcinka. Wówczas odcinki AM oraz BM mają długość 2, więc z warunków zadania wynika, że zarówno A, jak i B są innego koloru niż M. To oznacza, że punkty A i B mają ten sam kolor. Z dowolności wyboru odcinka AB wynika, że każdy odcinek długości 4 ma końce tego samego koloru.

c) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 6 zawarty w danej prostej, a przez K i L takie punkty, że $AK = KL = LB = 2$. Wówczas punkty A oraz K są innego koloru, a punkty K i B są tego samego koloru (co wynika z rozwiązania pierwszego podpunktu). Wobec tego punkty A i B są różnych kolorów.

b) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 10 zawarty w danej prostej, przez M — środek tego odcinka, a przez N — taki punkt, że $AN = 4$ oraz $NB = 6$. Z rozwiązania podpunktu a) wnioskujemy, że A i N mają ten sam kolor, a z rozwiązania podpunktu c) otrzymujemy, że N i B są różnych kolorów. To oznacza, że punkty A i B są różnych kolorów. W takim razie jeden z odcinków AM, BM długości 5 ma końce różnych kolorów.

Uwaga

Zauważmy, że w podpunkcie c) wykazaliśmy własność znacznie ogólniejszą niż sformułowaną w treści zadania, mianowicie *każdy* odcinek długości 6 ma końce różnego koloru.

132. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że

N a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

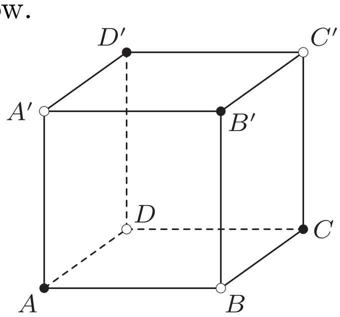
T b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

N c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

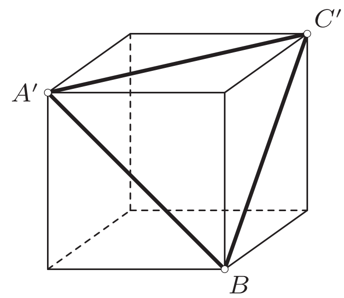
Wyjaśnienie

Oznaczmy dwie przeciwległe ściany sześcianu przez $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ w taki sposób, aby odcinki AA', BB', CC', DD' były krawędziami sześcianu.

a), c) Jeżeli pomalujemy wierzchołki A, B', C, D' na czarno, a wierzchołki A', B, C', D na biało (rys. 60), to każda krawędź i każda przekątna sześcianu będzie miała wierzchołki różnych kolorów.



rys. 60



rys. 61

b) Ponieważ wierzchołki pomalowano dwoma kolorami, więc pewne dwa wierzchołki trójkąta $A'BC'$ zostały pomalowane tym samym kolorem. To oznacza, że pewien bok tego trójkąta ma końce tego samego koloru (rys. 61).

---

133. Każda krawędź graniastosłupa n-kątnego została pomalowana na jeden z trzech kolorów w taki sposób, że w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się krawędzie trzech kolorów. Wynika z tego, że

N a) n jest liczbą parzystą;

N b) wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa mają ten sam kolor;

T c) ten graniastosłup ma po n krawędzi każdego koloru.

Wyjaśnienie

a), b) Rozważmy graniastosłup trójkątny o podstawach ABC, $A'B'C'$ i krawędziach bocznych AA', BB', CC' (rys. 62). Jeżeli krawędzie AA', BC, $B'C'$ pomalujemy na czerwono, krawędzie BB', CA, $C'A'$ na zielono, a krawędzie CC', AB, $A'B'$ na niebiesko, to warunki zadania będą spełnione. Wówczas $n=3$ jest liczbą nieparzystą oraz krawędzie AA', BB', CC' mają różne kolory.

c) Przyjmijmy, że krawędzie graniastosłupa pomalowano na czerwono, zielono i niebiesko. Z warunków zadania wynika, że każdy z $2n$ wierzchołków graniastosłupa jest końcem dokładnie jednej czerwonej krawędzi. Ponieważ każda krawędź łączy dokładnie dwa wierzchołki graniastosłupa, więc krawędzi czerwonych jest dokładnie $2n/2=n$. W pełni analogicznie uzasadniamy, że wielościan te posiada dokładnie n krawędzi zielonych i dokładnie n krawędzi niebieskich.

134. Dokładnie 70% uczniów pewnej klasy uczy się języka angielskiego, dokładnie 50% uczy się języka niemieckiego oraz dokładnie 30% uczy się języka francuskiego. Wynika z tego, że

N a) każdy uczeń tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego;

N b) co najmniej połowa uczniów tej klasy uczy się co najmniej dwóch języków;

T c) istnieje osoba, która uczy się co najmniej dwóch języków, w tym niemieckiego.

Wyjaśnienie

a), b) Przypuśćmy, że w 10-osobowej klasie jest:

- 3 uczniów, którzy uczą się wszystkich trzech języków;
- 2 uczniów, którzy uczą się tylko niemieckiego;
- 4 uczniów, którzy uczą się tylko angielskiego;
- 1 uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego.

Wówczas warunki zadania są spełnione, a przy tym istnieje uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego oraz mniej niż połowa uczniów uczy się co najmniej dwóch języków.

c) Skoro 50% uczniów uczy się niemieckiego, a 70% uczniów uczy się angielskiego, to co najmniej 20% uczniów uczy się obu tych języków jednocześnie.

---

135. Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

N a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;

N b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;

N c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

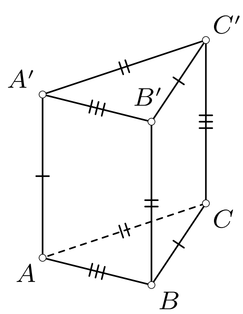
Wyjaśnienie

Na poniższych obrazkach każda gruba kropka oznacza osobę, a odcinek łączący dwie kropki — uścisk dłoni między odpowiadającymi im osobami.

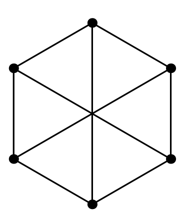
a) Może się zdarzyć, że każdy wymienił dokładnie 3 uściski dłoni (rys. 63).

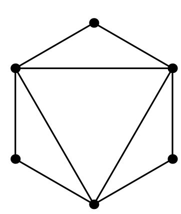
b) Może się zdarzyć, że każdy wymienił 2 lub 4 uściski dłoni (rys. 64).

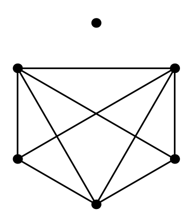
c) Może się zdarzyć, że pewna osoba nie wymieniła ani jednego uścisku dłoni (rys. 65).



rys. 62

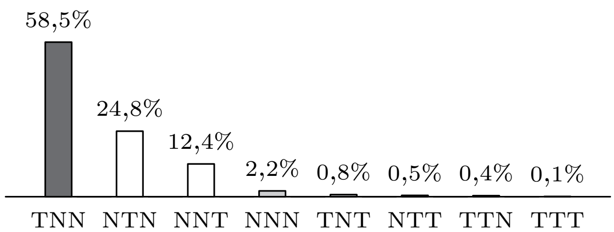

rys. 63


rys. 64

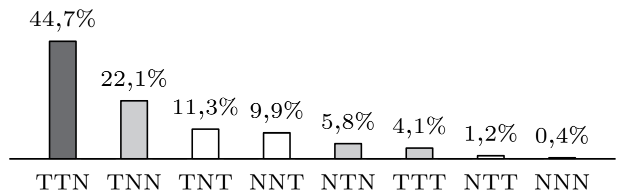

rys. 65

Odpowiedzi uczestników Olimpiady

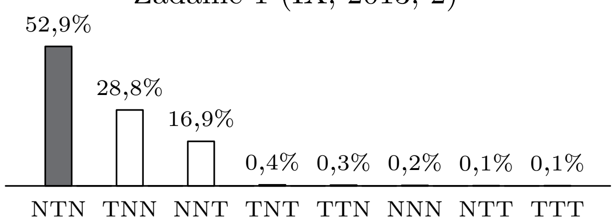
Poniższe zestawienie przedstawia procentową liczbę udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach przez uczestników Olimpiady. Obok każdego zadania podano źródło jego pochodzenia (numer Olimpiady, rok oraz numer zadania w zestawie konkursowym). Zadania, które nie występują w poniższym zestawieniu pochodzą z testu próbnego przygotowanego w 2011 roku przed pierwszą edycją testu.



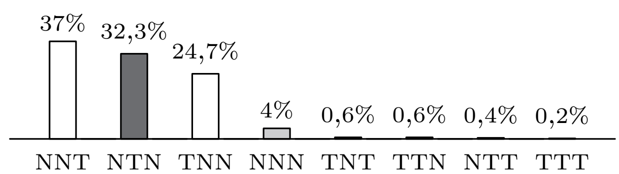
Zadanie 1 (IX, 2013, 2)



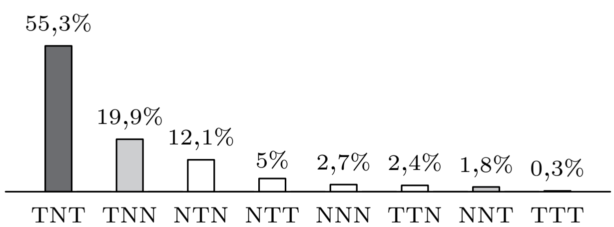
Zadanie 2 (X, 2014, 2)



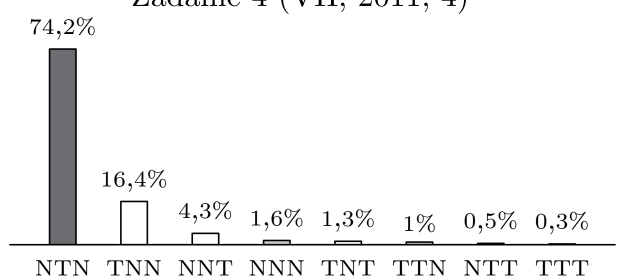
Zadanie 3 (XIV, 2018, 1)



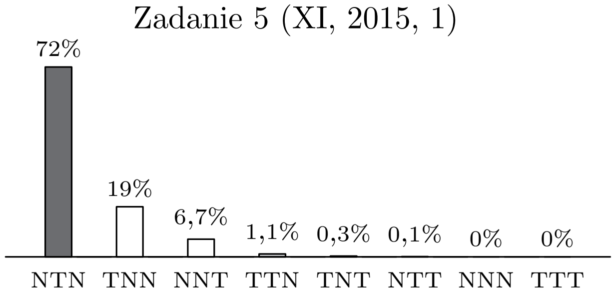
Zadanie 4 (VII, 2011, 4)



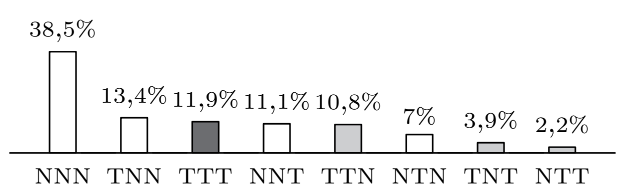
Zadanie 5 (XI, 2015, 1)



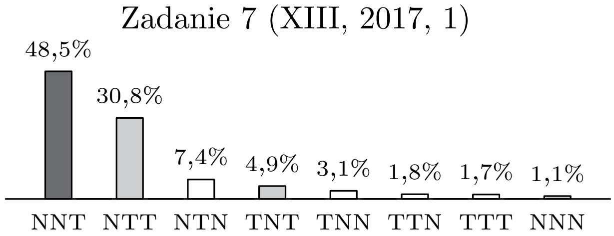
Zadanie 6 (XII, 2016, 1)



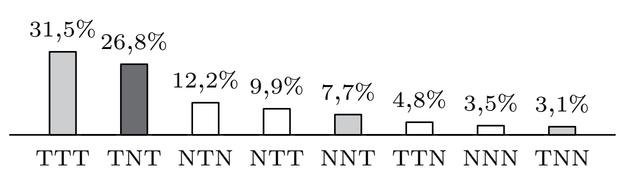
Zadanie 7 (XIII, 2017, 1)



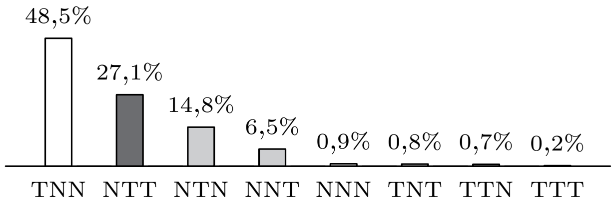
Zadanie 9 (XIV, 2018, 3)



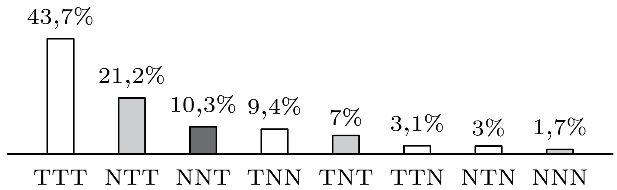
Zadanie 10 (XIII, 2017, 3)



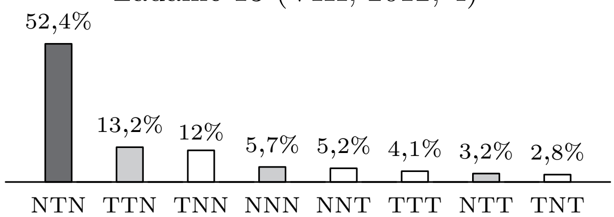
Zadanie 12 (VII, 2011, 5)



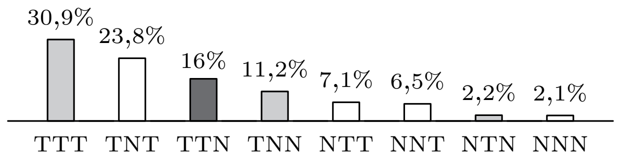
Zadanie 13 (VIII, 2012, 4)



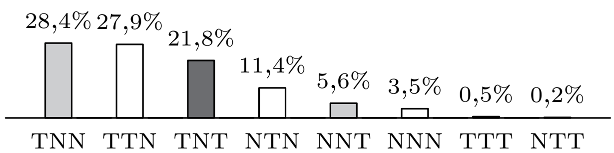
Zadanie 15 (XII, 2016, 3)



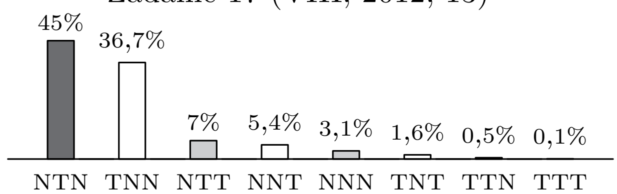
Zadanie 16 (XIV, 2018, 10)



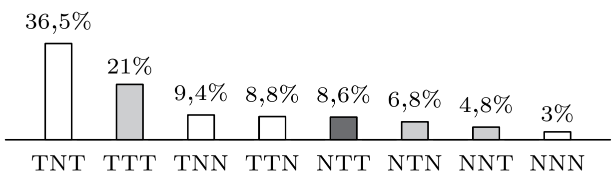
Zadanie 17 (VIII, 2012, 13)



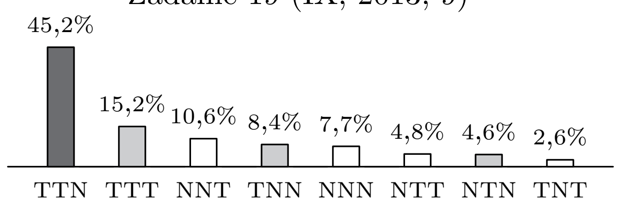
Zadanie 18 (IX, 2013, 6)



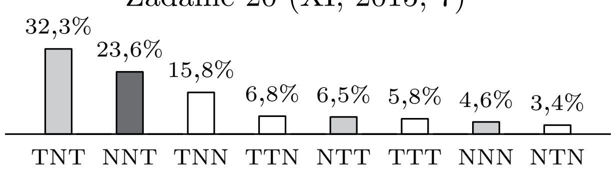
Zadanie 19 (IX, 2013, 9)



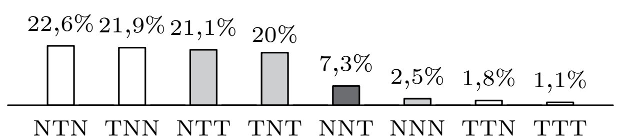
Zadanie 20 (XI, 2015, 7)



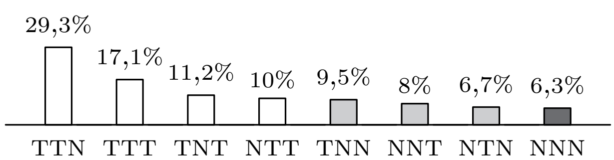
Zadanie 21 (X, 2014, 3)



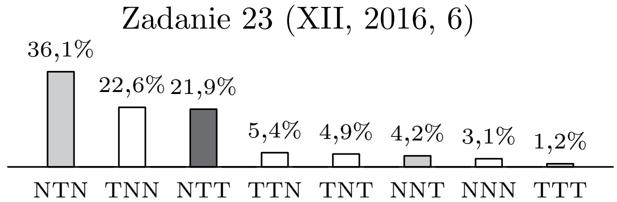
Zadanie 22 (XI, 2015, 9)



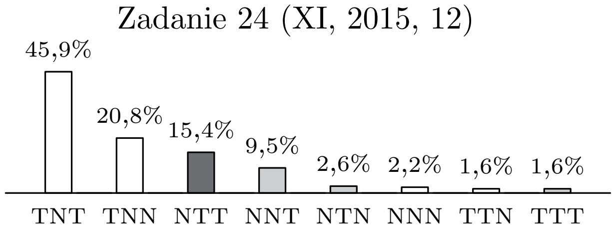
Zadanie 23 (XII, 2016, 6)



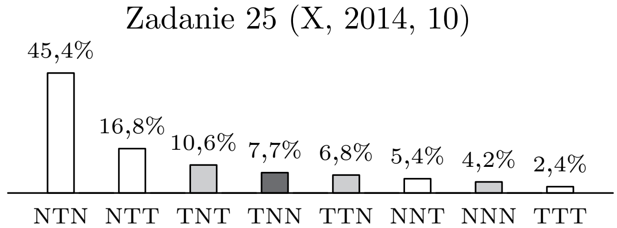
Zadanie 24 (XI, 2015, 12)



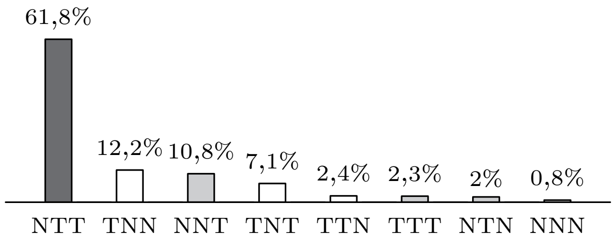
Zadanie 25 (X, 2014, 10)



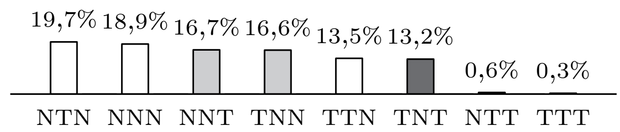
Zadanie 26 (VIII, 2012, 11)



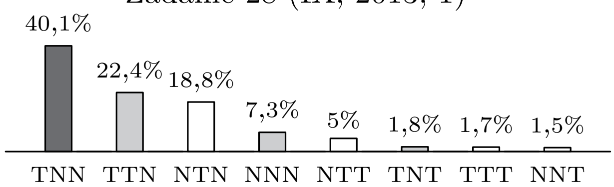
Zadanie 27 (VII, 2011, 14)



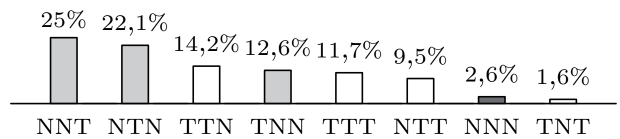
Zadanie 28 (IX, 2013, 1)



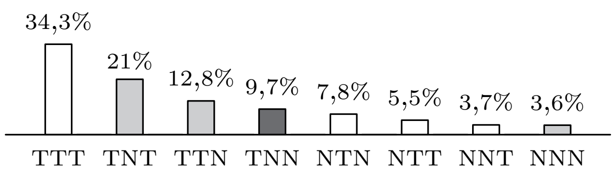
Zadanie 29 (IX, 2013, 10)



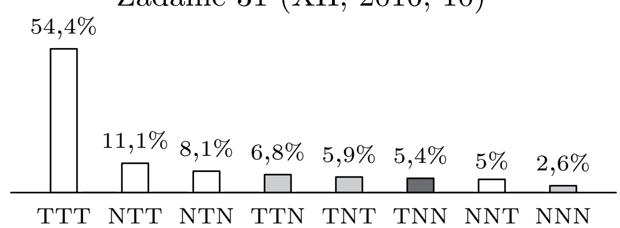
Zadanie 30 (X, 2014, 14)



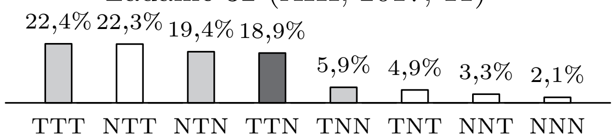
Zadanie 31 (XII, 2016, 10)



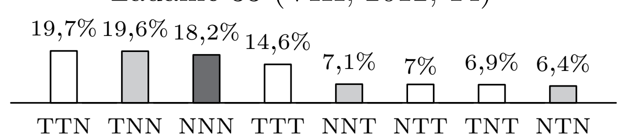
Zadanie 32 (XIII, 2017, 11)



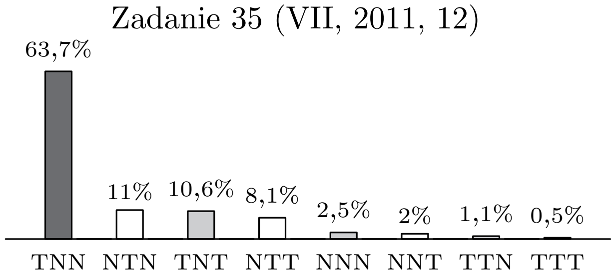
Zadanie 33 (VIII, 2012, 14)



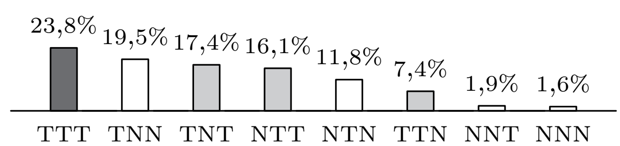
Zadanie 35 (VII, 2011, 12)



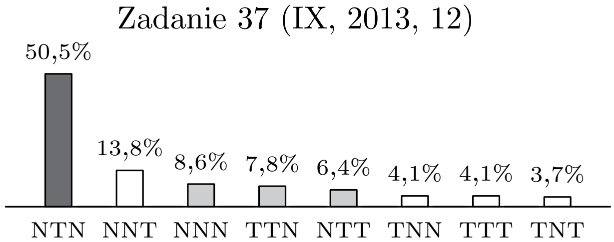
Zadanie 36 (VIII, 2012, 2)



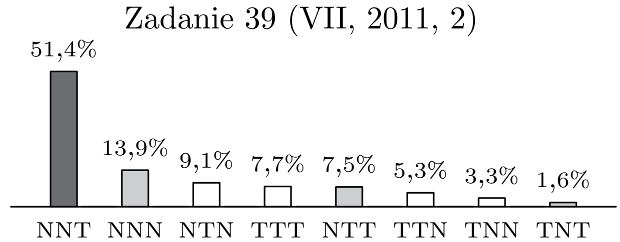
Zadanie 37 (IX, 2013, 12)



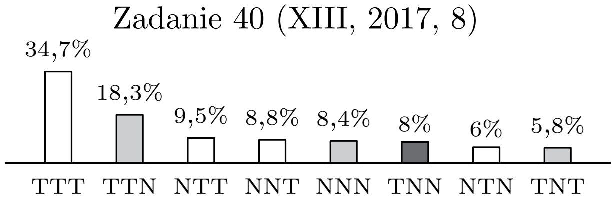
Zadanie 39 (VII, 2011, 2)



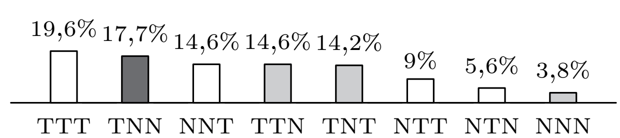
Zadanie 40 (XIII, 2017, 8)



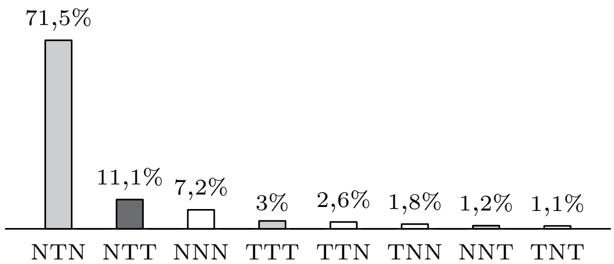
Zadanie 43 (VII, 2011, 6)



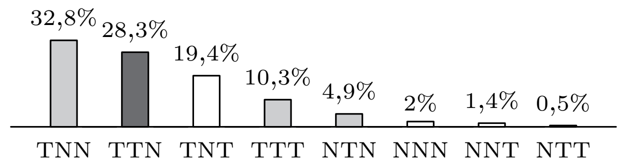
Zadanie 44 (VII, 2011, 10)



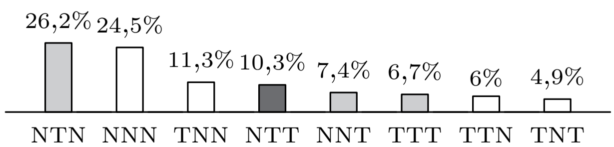
Zadanie 46 (XIII, 2017, 12)



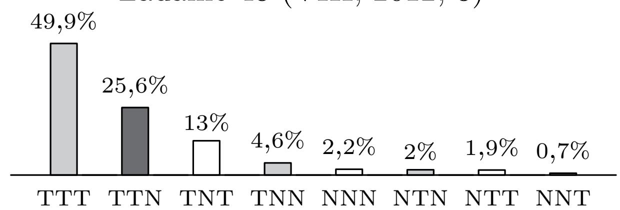
Zadanie 47 (XIV, 2018, 5)



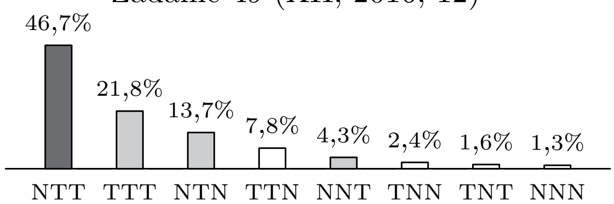
Zadanie 48 (VIII, 2012, 3)



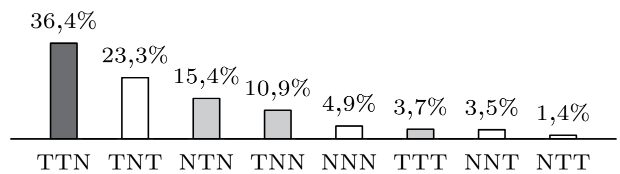
Zadanie 49 (XII, 2016, 12)



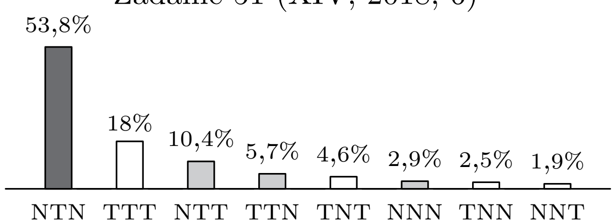
Zadanie 50 (VIII, 2012, 5)



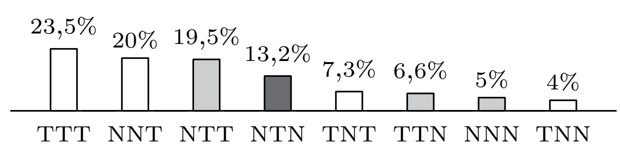
Zadanie 51 (XIV, 2018, 6)



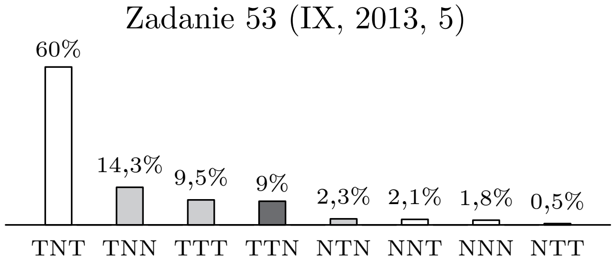
Zadanie 52 (VIII, 2012, 9)



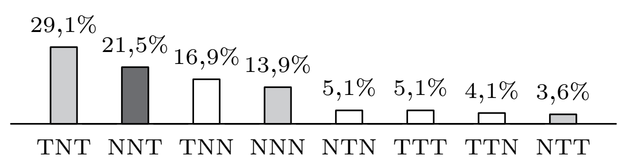
Zadanie 53 (IX, 2013, 5)



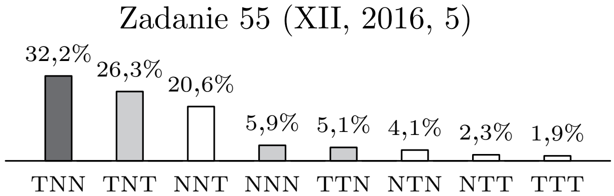
Zadanie 54 (XIV, 2018, 13)



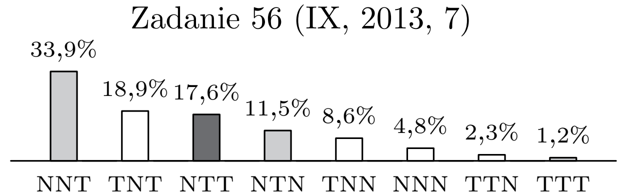
Zadanie 55 (XII, 2016, 5)



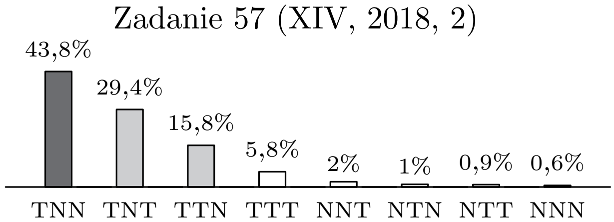
Zadanie 56 (IX, 2013, 7)



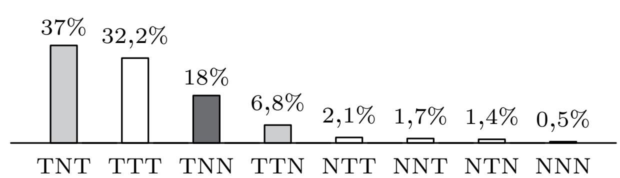
Zadanie 57 (XIV, 2018, 2)



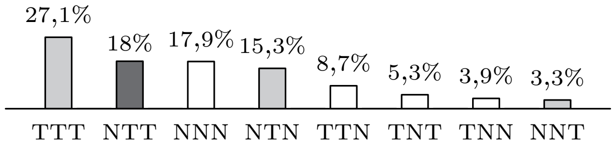
Zadanie 58 (XI, 2015, 3)



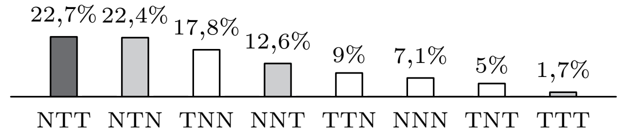
Zadanie 59 (X, 2014, 4)



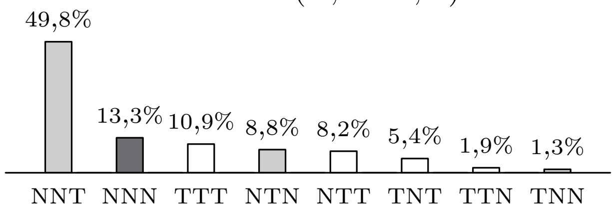
Zadanie 60 (X, 2014, 6)



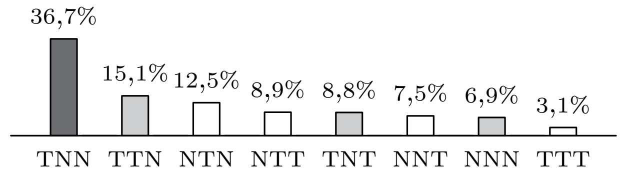
Zadanie 61 (X, 2014, 9)



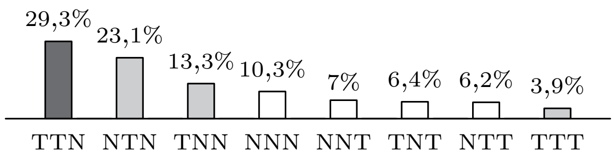
Zadanie 62 (XIII, 2017, 5)



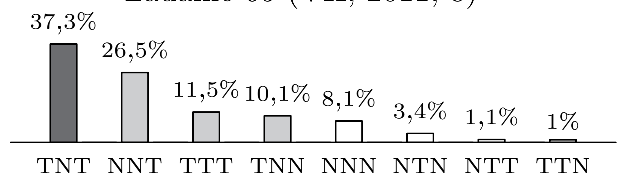
Zadanie 64 (XIII, 2017, 7)



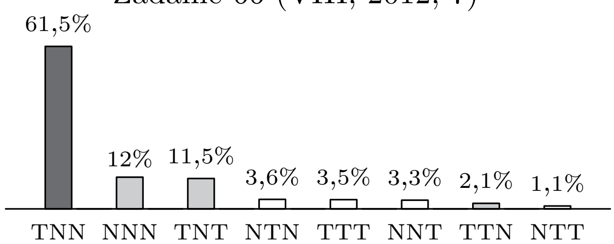
Zadanie 65 (VII, 2011, 8)



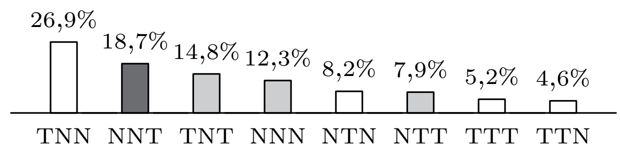
Zadanie 66 (VIII, 2012, 7)



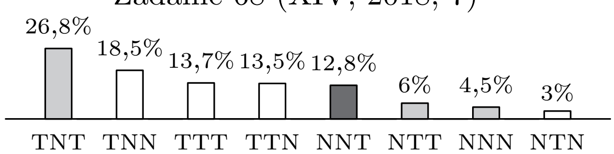
Zadanie 67 (XII, 2016, 8)



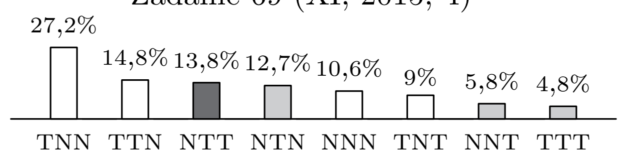
Zadanie 68 (XIV, 2018, 7)



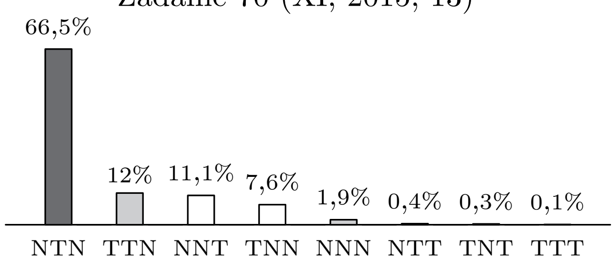
Zadanie 69 (XI, 2015, 4)



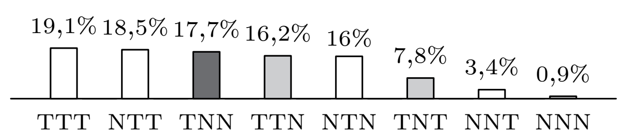
Zadanie 70 (XI, 2015, 13)



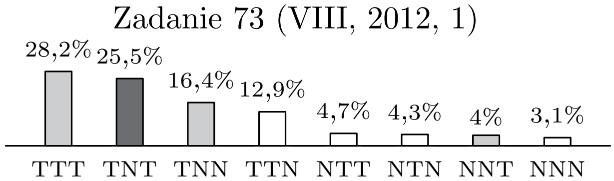
Zadanie 71 (X, 2014, 13)



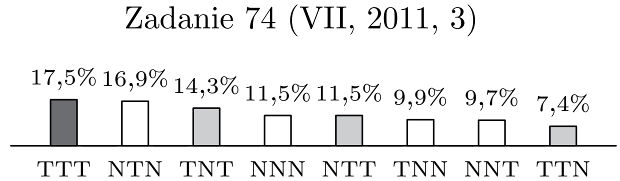
Zadanie 73 (VIII, 2012, 1)



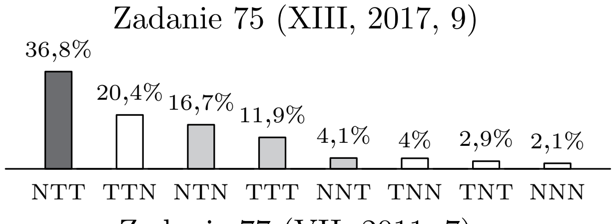
Zadanie 74 (VII, 2011, 3)



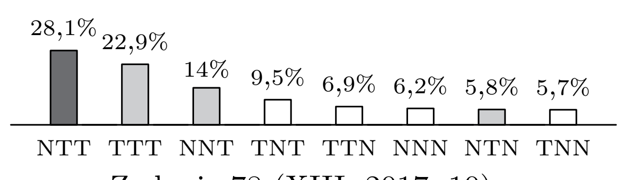
Zadanie 75 (XIII, 2017, 9)



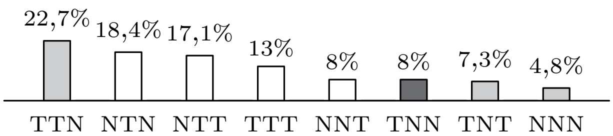
Zadanie 76 (XIV, 2018, 15)



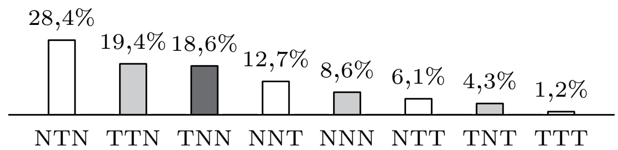
Zadanie 77 (VII, 2011, 7)



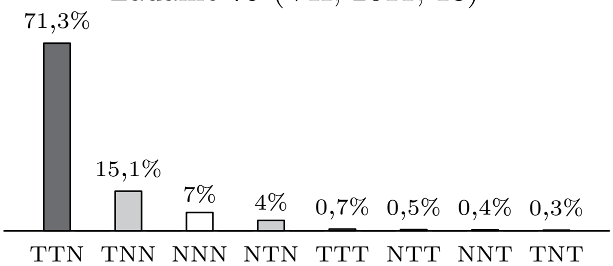
Zadanie 78 (XIII, 2017, 10)



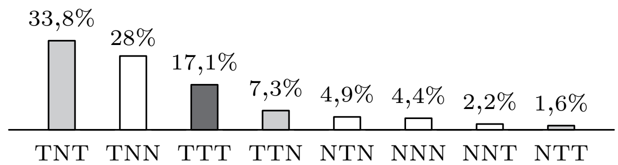
Zadanie 79 (VII, 2011, 13)



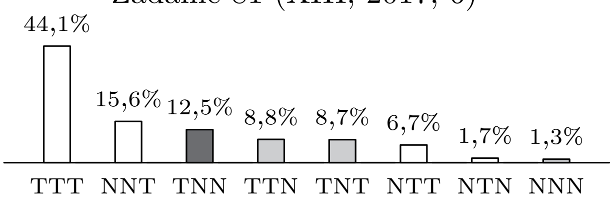
Zadanie 80 (VIII, 2012, 10)



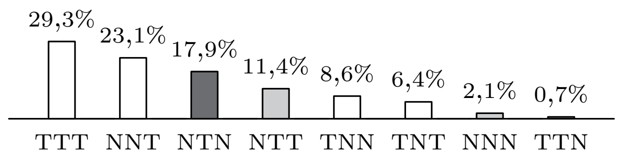
Zadanie 81 (XIII, 2017, 6)



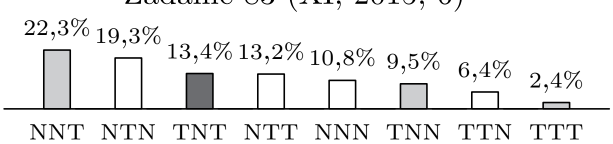
Zadanie 82 (XIV, 2018, 8)



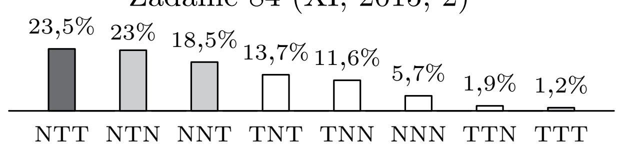
Zadanie 83 (XI, 2015, 6)



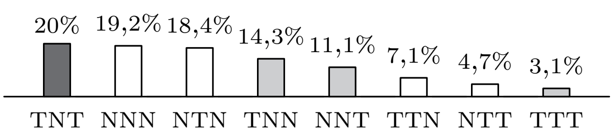
Zadanie 84 (XI, 2015, 2)



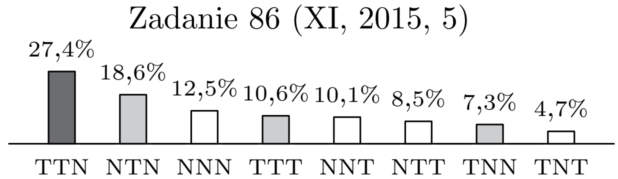
Zadanie 85 (XII, 2016, 11)



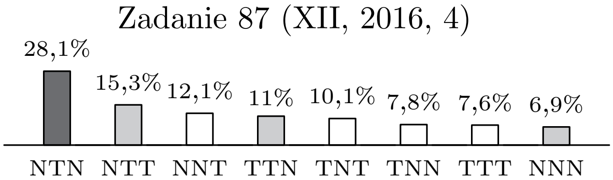
Zadanie 86 (XI, 2015, 5)



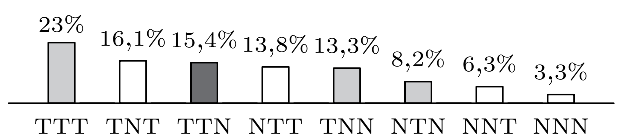
Zadanie 87 (XII, 2016, 4)



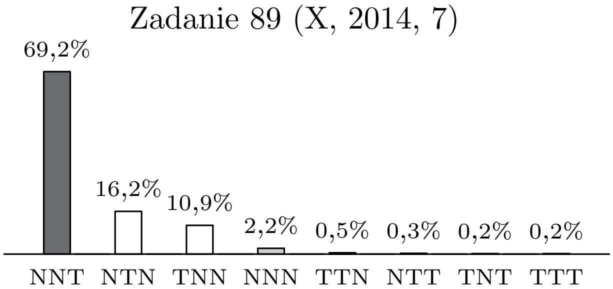
Zadanie 88 (VII, 2011, 9)



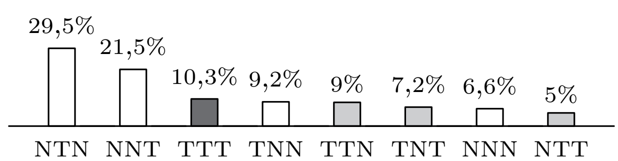
Zadanie 89 (X, 2014, 7)



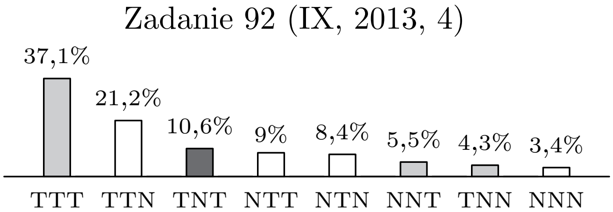
Zadanie 90 (X, 2014, 11)



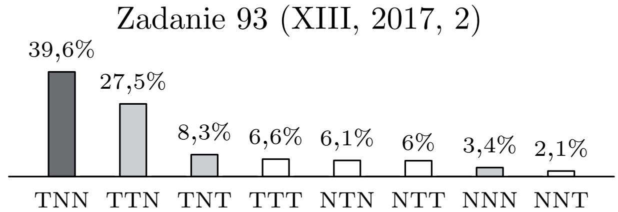
Zadanie 92 (IX, 2013, 4)



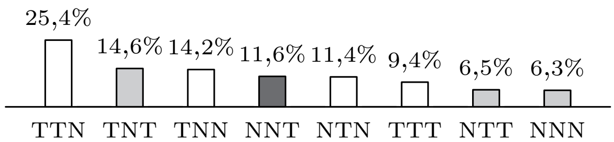
Zadanie 93 (XIII, 2017, 2)



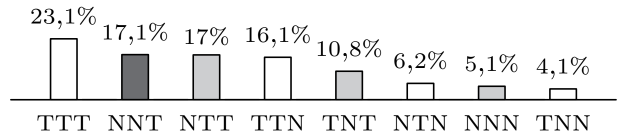
Zadanie 94 (VII, 2011, 11)



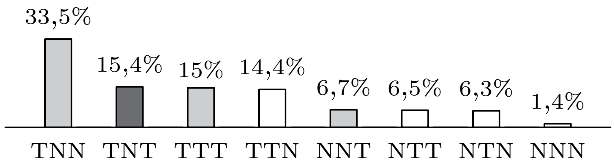
Zadanie 95 (X, 2014, 8)



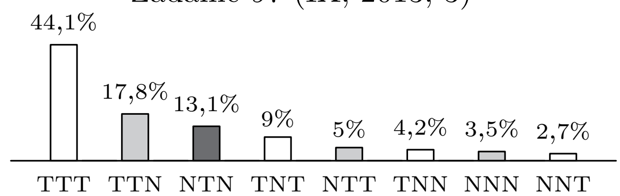
Zadanie 96 (XII, 2016, 9)



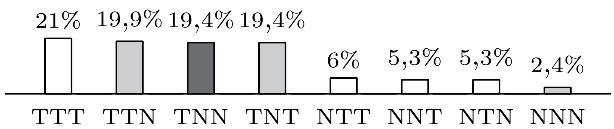
Zadanie 97 (IX, 2013, 3)



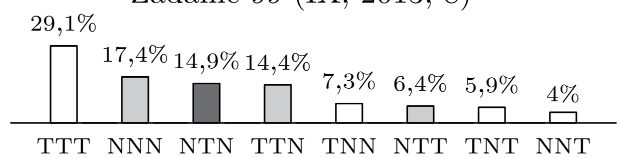
Zadanie 98 (XIV, 2018, 12)



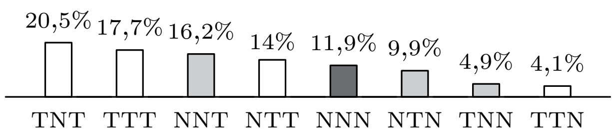
Zadanie 99 (IX, 2013, 8)



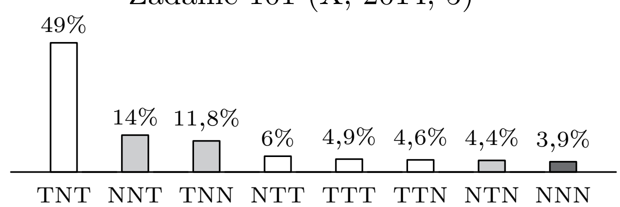
Zadanie 100 (XI, 2015, 14)



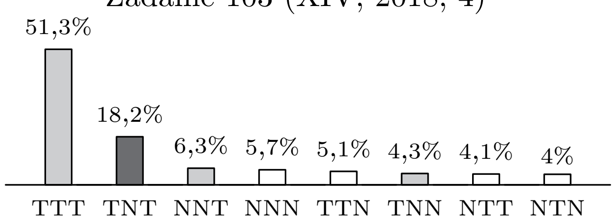
Zadanie 101 (X, 2014, 5)



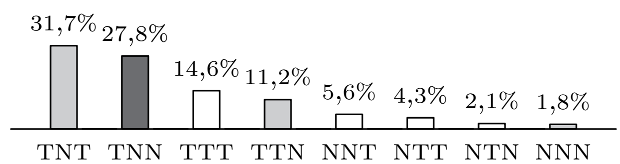
Zadanie 103 (XIV, 2018, 4)



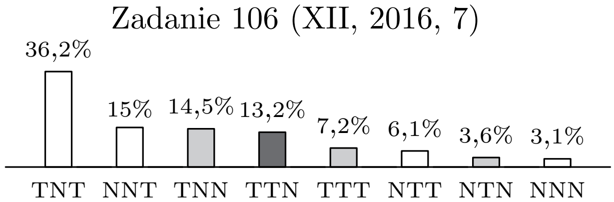
Zadanie 105 (XIII, 2017, 13)



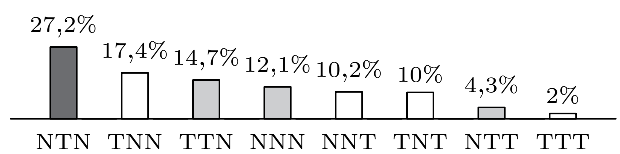
Zadanie 106 (XII, 2016, 7)



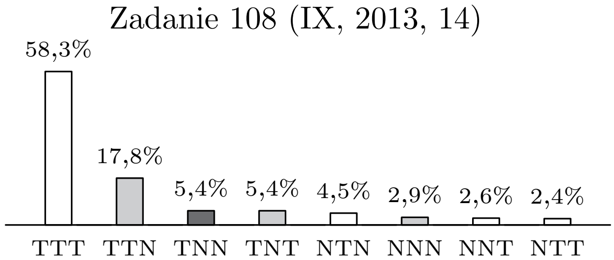
Zadanie 107 (XI, 2015, 10)



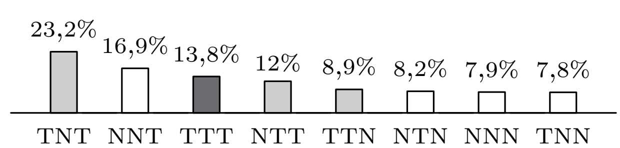
Zadanie 108 (IX, 2013, 14)



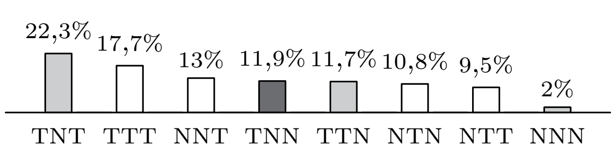
Zadanie 109 (X, 2014, 12)



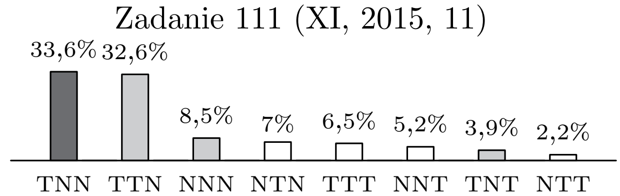
Zadanie 110 (IX, 2013, 11)



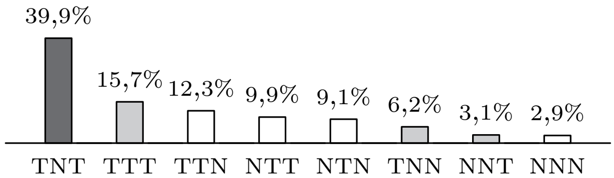
Zadanie 111 (XI, 2015, 11)



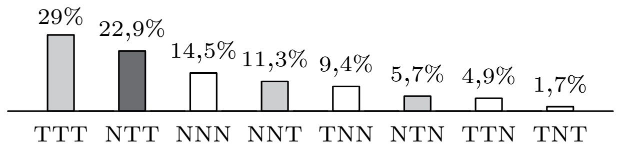
Zadanie 112 (XII, 2016, 14)



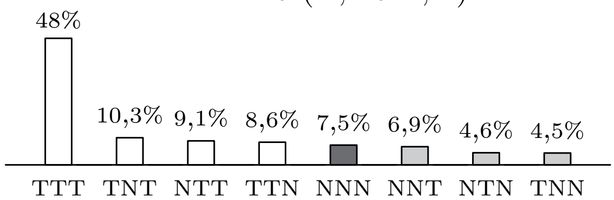
Zadanie 114 (VII, 2011, 1)



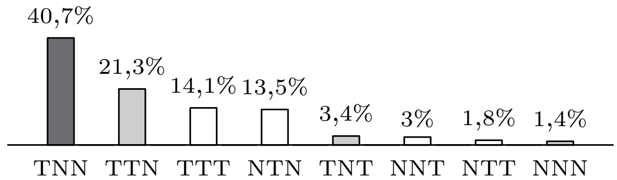
Zadanie 115 (X, 2014, 1)



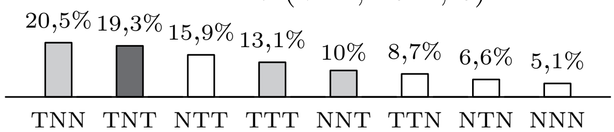
Zadanie 116 (VII, 2011, 15)



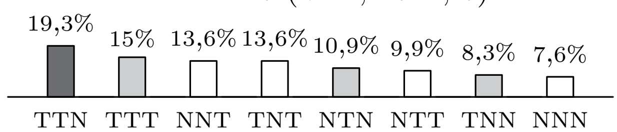
Zadanie 117 (VIII, 2012, 6)



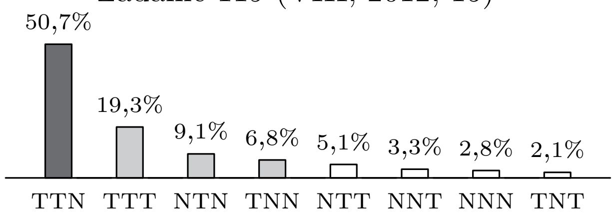
Zadanie 118 (VIII, 2012, 8)



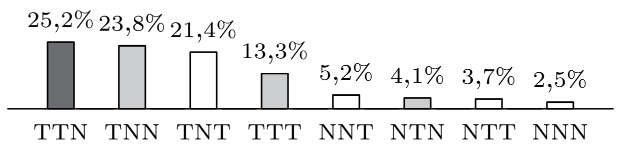
Zadanie 119 (VIII, 2012, 15)



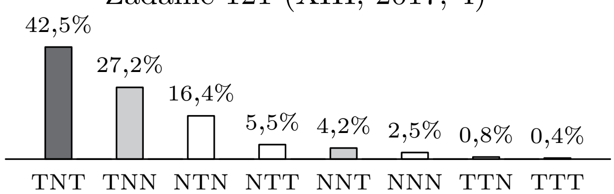
Zadanie 120 (VIII, 2012, 12)



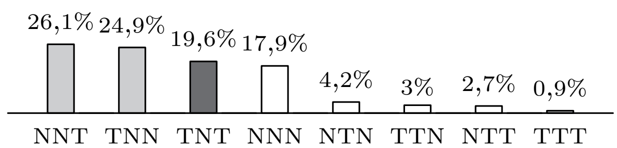
Zadanie 121 (XIII, 2017, 4)



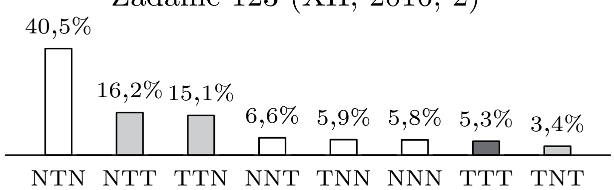
Zadanie 122 (XIV, 2018, 14)



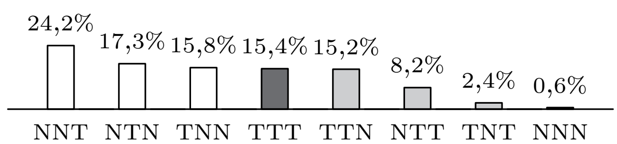
Zadanie 123 (XII, 2016, 2)



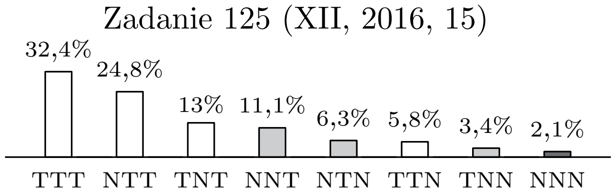
Zadanie 124 (IX, 2013, 13)



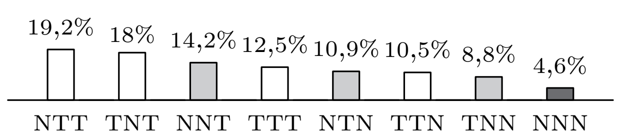
Zadanie 125 (XII, 2016, 15)



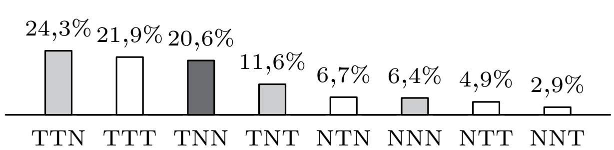
Zadanie 126 (XIII, 2017, 15)



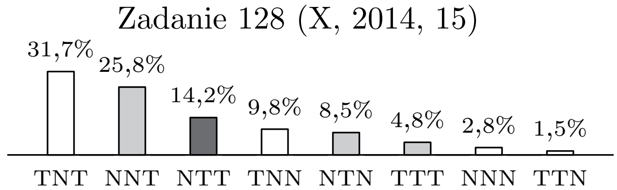
Zadanie 127 (XI, 2015, 15)



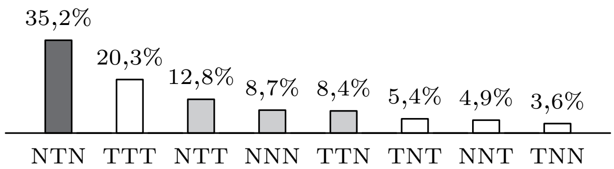
Zadanie 128 (X, 2014, 15)



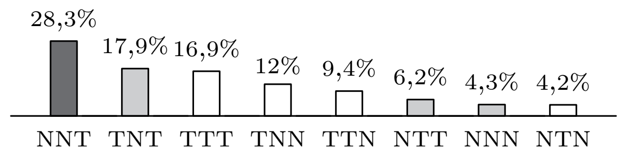
Zadanie 130 (IX, 2013, 15)



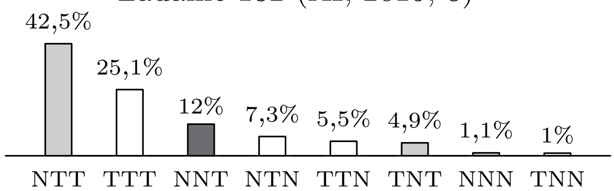
Zadanie 131 (XIII, 2017, 14)



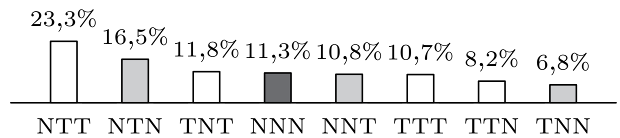
Zadanie 132 (XI, 2015, 8)



Zadanie 133 (XII, 2016, 13)



Zadanie 134 (XIV, 2018, 11)



Zadanie 135 (XIV, 2018, 9)

Spis treści