# Układanie równań i nierówności

Szkolenie „Praca z uczniem zdolnym” organizowane przez UMCS
Arkadiusz Męcel (a.mecel@mimuw.edu.pl)
Zoom, 25-26.03.2022 r.

**Zadanie 1.** Do pewnej dodatniej liczby całkowitej $n$ dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby $n$. Wyznacz wszystkie liczby $n$ o tej własności.

**Zadanie 2.** Jeżeli w pewnej liczbie pięciocyfrowej $n$ dopiszemy jedynkę z lewej strony, to otrzymamy pewną liczbę sześciocyfrową. Jeżeli zaś jedynkę dopiszemy z prawej strony tej liczby, to otrzymamy liczbę sześciocyfrową, która jest trzykrotnie większa od poprzednio otrzymanej liczby. Znajdź tą liczbę pięciocyfrową.

**Zadanie 3.** Znajdź najmniejszą liczbę $n$ zakończoną cyfrą 6 o tej własności, że przeniesienie cyfry 6 na początek liczby $n$ da nam liczbę $4n$.

**Zadanie 4.** Wybrano $n$ (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba $n$-cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba $n$ jest podzielna przez 6.

**Zadanie 5.** Znajdź wszystkie całkowite dodatnie liczby $n$, dla których liczba uzyskana przez wymazanie ostatniej cyfry jest dzielnikiem $n$.

**Zadanie 6.** Znajdź wszystkie liczby złożone $n$ zaczynające się cyfrą 6, które maleją 25 razy, gdy ta pierwsza cyfra jest z zapisu $n$ usunięta.

**Zadanie 7.** Pokaż, że nie istnieje liczba złożona $n$, która maleje 35 razy, gdy usunie się pierwszą cyfrę od lewej.

**Zadanie 8.** Pierwszą cyfrą liczby 6-cyfrowej $n$ jest 3. Jeżeli tą pierwszą cyfrę przesuniemy z pierwszego miejsca na ostatnie, to otrzymamy czwartą część wyjściowej liczby $n$. Znajdź tą liczbę sześciocyfrową.

**Zadanie 9.** Wykaż, że nie istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n$, że po przeniesieniu ostatniej jej cyfry na początek uzyskamy liczbę dwukrotnie mniejszą.

**Zadanie 10.** Na tablicy zapisana jest dodatnia liczba całkowita $N$. Jeśli nie jest to liczba jednocyfrowa, wykonujemy następujące operacje: wycieramy ostatnią cyfrę $c$ liczby $N$ i zastępujemy uzyskaną liczbę $M$ przez liczbę $M - 3c$. Znajdź wszystkie liczby $N$, dla których wielokrotne wykonywanie opisanych operacji prowadzi do uzyskania liczby 0.

**Zadanie 11.** Liczba naturalna $n$ jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby $n$. Wyznacz wszystkie liczby $n$ o tej własności.

**Zadanie 12.** Jeśli $n$ jest liczbą naturalną, to przez $\hat{n}$ oznaczamy liczbę otrzymaną z liczby $n$ przez przestawienie jest pierwszej cyfry na koniec. Pokaż, że jeśli $\frac{\hat{n}}{n}$ jest liczbą całkowitą, to musi być ona równa 1 lub 3.

**Zadanie 13.** Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite $n$, które są równe sumie swoich cyfr powiększonej o iloczyn swoich cyfr.

**Zadanie 14.** Dodatnią liczbę całkowitą $n$ nazwiemy *zbalansowaną*, jeśli liczba jej cyfr w zapisie dziesiętnym równa jest liczbie jej parami różnych dzielników pierwszych. Na przykład liczba 15 jest zbalansowana, a liczba 49 nie jest zbalansowana. Pokaż, że istnieje tylko skończenie wiele zbalansowanych liczb.

**Zadanie 15.** Liczby $2^n$ oraz $5^n$ zaczynają się tą samą cyfrą. Jaka to może być cyfra?

**Zadanie 16.** Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej $n$, względnie pierwszej z 10, istnieje liczba postaci $11\ldots1$ podzielna przez $n$. Pokaż też, że dla każdej liczby naturalnej $s$ istnieje liczba naturalna $u$ taka, że $u \cdot 2^s$ jest palindromiczna oraz liczba naturalna $w$ taka, że liczba $w \cdot 5^s$ jest palindromiczna

**Zadanie 17.** Pokaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $a, b$ mamy $s(a+b) \leqslant s(a) + s(b)$ oraz $s(ab) \leqslant s(a)s(b)$, gdzie $s(n)$ jest sumą cyfr liczby naturalnej $n$.