Wśród równoległoboków

Czyli o dwóch motywach w zadaniach z geometrii na OMJ

Filip Maziarka i Patryk Rosół

Fakt 1. *Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i AC trójkąta ABC odpowiednio. Wówczas*

$$MN \parallel BC \text{ oraz } MN = \frac{1}{2}BC.$$

Fakt 2. *Punkt M jest środkiem boku BC w trójkącie ABC. Wtedy*

$$\angle BAC = 90^\circ \iff AM = \frac{1}{2}BC.$$

1 Dorysujmy środek odcinka

Zadanie 1. *W czworokącie $ABCD$ punkty P, Q, R, S są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD DA. Wykazać, że czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem.*

Zadanie 2. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Udowodnij, że $AB + CD \geqslant 2MN$ oraz, że równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe.*

Zadanie 3. *Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi punktów A i B odpowiednio na proste BC i CA. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą DE. Dowieść, że $PE = DQ$.*

Zadanie 4. *(VII OMG, I etap) W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.*

Zadanie 5. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach A, C są proste. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB,BC,CD,DA. Dowieść, że obwód czworokąta $KLMN$ jest nie mniejszy od $2AC$.*

Zadanie 6. *Dany jest trójkąt ABC. Środkowe poprowadzone do boków AB i AC są prostopadłe. Punkt H jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A. Wykazać, że $AH \leqslant \frac{3}{2}BC$*

Zadanie 7. *(IX OMG, II etap) W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\angle CAE = \angle BCD$, to $AC = CD$.*

Zadanie 8. *Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że $\angle AKC = \angle BLC = 90^\circ$ oraz $\angle CAK = \angle CBL$. Wykaż, że $MK = ML$.*

Zadanie 9. *(73 OM, II etap) Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BC, przy czym $\angle DAC = \angle EAB$. Punkt M jest środkiem odcinka CE. Udowodnić, że $BM = DM$.*

Zadanie 10. *Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ przy czym $\angle PAD = \angle PBC$ oraz $\angle PDA = \angle PCB$. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AD i BC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AB i CD. Wykazać, że punkty K i L są symetryczne względem prostej MN.*

2 Dorysujmy równoległobok

Zadanie 11. *W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku BC. Wykazać, że* $\frac{1}{2}(AB + AC) > AM$

Zadanie 12. *W trójkącie ABC punkt M jest środkiem BC, oraz punkt X leży na odcinku AM. Wykaż że $\angle BAM = \angle MXC$ wtedy i tylko wtedy gdy $AB = CX$.*

Zadanie 13. *Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AB trójkąta równobocznego ABC, przy czym $BE = CD$. Punkt M jest środkiem odcinka DE. Wykazać, że* $BM = \frac{1}{2}AD$

Zadanie 14. *(XIV OMJ, II etap) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = 3BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykaż, że* $\angle PMQ = 90^\circ$

Zadanie 15. *(XIV OMJ, III etap) Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD. Wykaż, że $\angle ACM = \angle CBD$.*

Zadanie 16. *Na bokach BC i CA trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ i $CAFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DF i EG. Znając długości boków trójkąta ABC, obliczyć długość odcinka MN.*

Zadanie 17. *Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą takie punkty D i E, że $BD = DE = EA$. Udowodnij, że $\angle ABE = 30^\circ$.*

Zadanie 18. *(Obóz Naukowy OMG, 2015) Dany jest trójkąt ABC w którym $AC = BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB = BD = DE$ oraz $AD = CE$. Wyznacz miarę kąta $\angle ACB$.*

Zadanie 19. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg o średnicy AB przechodzi przez punkty C i D. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Dowieść, że proste CD i BE są prostopadłe.*

Zadanie 20. *(LXII OM, II etap) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ w którym $AB < BC$ oraz $AD < CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $PB = AB$ oraz $QD = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ. Wykaż, że jeśli kąt $\angle BMD$ jest prosty, to na $ABCD$ można opisać okrąg.*

Zadanie 21. *Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle ACB = 90^\circ$. Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że:*

$$\angle ADC = \angle BDF \qquad \angle BFD = \angle AFE \qquad \angle AEF = \angle BEC$$

Udowodnij, że $AD + DF = BE + EF$.