Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Wzory skróconego mnożenia

Seminarium zdalne dla nauczycieli matematyki
(18–19 września 2020 r.)

Teoria

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
4. **Tożsamość Sophie Germain.** $a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$
   Warto zauważyć, że jeśli $a > 1$ lub $b > 1$, to wyrażenia w obu nawiasach także są większe od 1.

Zadania

1. *(1/1/V OMG)* Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c dla których $a^2 = b^2 + c$.
2. *(test/VII OMG)* Czy liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ jest wymierna?
3. *(1/1/I OMG)* Dowieść, że
$$\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1.$$
4. Wykaż, że jeśli każda z liczb x, y jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to ich iloczyn xy również ma tę własność.
5. *(1/2/II OMG)* Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniających układ równań:
$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22. \end{cases}$$
6. *(1/1/VI OMG)* Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2 \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}$$
7. Udowodnij, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

8. **(Nierówność Schwarza).** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c i d zachodzi nierówność
$$ac + bd \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}.$$

9. *(4/3/X OMG)* Dane są takie dodatnie liczby całkowite, że $a^2 + 2b + 1$ oraz $b^2 + 2a + 1$ są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Wykaż, że $a = b$.

10. Wykaż, że dla żadnego naturalnego n liczba $n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n + 1$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

11. *(4/3/VII OMG)* Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby $\sqrt{100^n + 2}$ na n-tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

12. Wykaż, że $4^{545} + 545^4$ jest liczbą złożoną.

13. *(4/2/I OMG)* Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

14. *(5/2/VIII OMG)* Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q), dla których liczba $p^2 + pq + q^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.